

**Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія**

**В. А. Овчаренко
С. В. Капорович
О. Ю. Деньщиков**

ОПІР МАТЕРІАЛІВ
Практикум
Частина 2

**Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів технічних вузів**

Краматорськ 2010

УДК 539.3/6
ББК 30.121
О-35

Рецензенти:

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист № від)

Овчаренко, В. А.

О-35 Опір матеріалів : практикум (для студентів механічних спеціальностей) / В. А. Овчаренко, С. В. Капорович, О. Ю. Деньщиков. – Краматорськ : ДДМА, 204. – Ч. 2. – 224 с.
ISBN

Містяться стислі теоретичні відомості за кожним розділом опору матеріалів, наводяться різноманітні приклади розрахунку основних типів задач і подається аналіз одержаних результатів. Друга частина присвячена вивченню випадків складного опору (розтягання – стискання, кручення, просте згинання), статично не визначуваних систем, розрахунків на стійкість та визначення напружено-деформованого стану при динамічному режимі навантаження.

УДК 539.3/6
ББК 30.121

ISBN

© В. А. Овчаренко, С. В. Капорович,
О. Ю. Деньщиков, 2010
© ДДМА, 2010

ЗМІСТ

Вступ	4
1 Складний опір	5
1.1 Складне та косе згинання.....	5
1.2 Згинання з крученням	40
2 Визначення переміщень	64
3 Розрахунок статично не визначуваних стрижневих систем	81
3.1 Розрахунок статично не визначуваних рам	82
3.2 Розрахунок нерозрізних балок.....	119
4 Стійкість стислих стрижнів.....	162
5 Деформування стрижнів при динамічному режимі навантаження.....	187
5.1 Змушені коливання системи з одним степенем вільності.....	187
5.2 Розрахунок елементів конструкцій при заданих прискореннях.....	204
5.3 Розрахунок елементів конструкцій на дію ударних навантажень	209
Література	216
ДОДАТКИ	
Додаток А. Двотавр. ДСТУ 8239-72	218
Додаток Б. Швелер. ДСТУ 8240-72	219
Додаток В. Кутик рівнобокий. ДСТУ 8509-72	220
Додаток Г. Кутик нерівнобокий. ДСТУ 8510-72	222
Додаток Д. Значення коефіцієнта φ	224

ВСТУП

Опір матеріалів є однією з основних загальноосвітніх інженерних дисциплін і грає суттєву роль у формуванні інженера будь-якої спеціальності. Особливо велике значення опір матеріалів має для механічних, машинобудівних і будівельних інженерних спеціальностей.

У курсі „Опір матеріалів“ вивчаються поняття про інженерні методи розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин і споруд.

Під міцністю розуміють здатність конструкції і її деталей витримувати певне навантаження, не руйнуючись.

Під жорсткістю розуміють здатність конструкції і її елементів протистояти зовнішнім навантаженням відносно деформації (зміна форми і розмірів), тобто при заданих навантаженнях деформації не повинні перевищувати певної величини.

Стійкістю називають здатність конструкції або її елементів зберігати певну початкову форму пружної рівноваги.

Щоб конструкція в цілому відповідала вимогам міцності, жорсткості і стійкості і була надійною в експлуатації, необхідно надати її елементам найбільш раціональної форми і, знаючи властивості матеріалів, з яких вони виготовлятимуться, визначати відповідні розміри залежно від величини і характеру діючих навантажень.

При вивченні опору матеріалів слід зважати на те, що введення до навчальних програм вищих технічних навчальних закладів нових дисциплін, що відображають сучасний стан науки і техніки, при обмежених термінах навчання призвело до суттєвого скорочення кількості аудиторних занять з курсу „Опір матеріалів“. Заповнення пропусків, що з'явилися внаслідок цього, в знанні студентами опору матеріалів може бути досягнуте певною мірою за рахунок самостійного вивчення ними необхідних розділів цього важливого для майбутнього інженера курсу за відповідними підручниками.

Основним недоліком наведених вище підручників є те, що вони містять малу кількість прикладів вирішення задач за кожним з розділів і не можуть передати особливості практичних рішень. Тому мета цього навчального посібника полягає в наданні допомоги студентові при розв'язанні задач з оцінки міцності, жорсткості і стійкості конструкцій при різноманітних видах їх навантаження. Для цього в кожному розділі наведено основні теоретичні передумови у вигляді остаточних формул, таблиць і графіків та приклади розв'язання характерних задач.

Друга частина присвячена вивченню випадків складного опору (розтягання – стискання, кручення, просте згинання), статично невизначуваних систем, розрахунків на стійкість та визначення напружено-деформованого стану при динамічному режимі навантаження.

1 СКЛАДНИЙ ОПІР

Під складним опором мають на увазі різні комбінації простих видів навантаження стрижнів (розтягання, стискання, зсув, кручення або згинання).

Нижче будуть розглянуті:

- одночасне згинання у двох головних площинах (складне і косе згинання);
- одночасне розтягання або стискання зі згинанням, зокрема позацентрове розтягання-стискання;
- одночасна дія згинання з крученням з розтяганням або без нього.

1.1 Складне та косе згинання

Складним (неплоским) згинанням називається такий вид навантаження, при якому сили діють у декількох площинах, що проходять через вісь балки (рис. 1.1, а).

Якщо навантаження діють в одній площині, що не збігається з жодною з головних площин, то такий вид згинання називається косим (рис. 1.1, б).

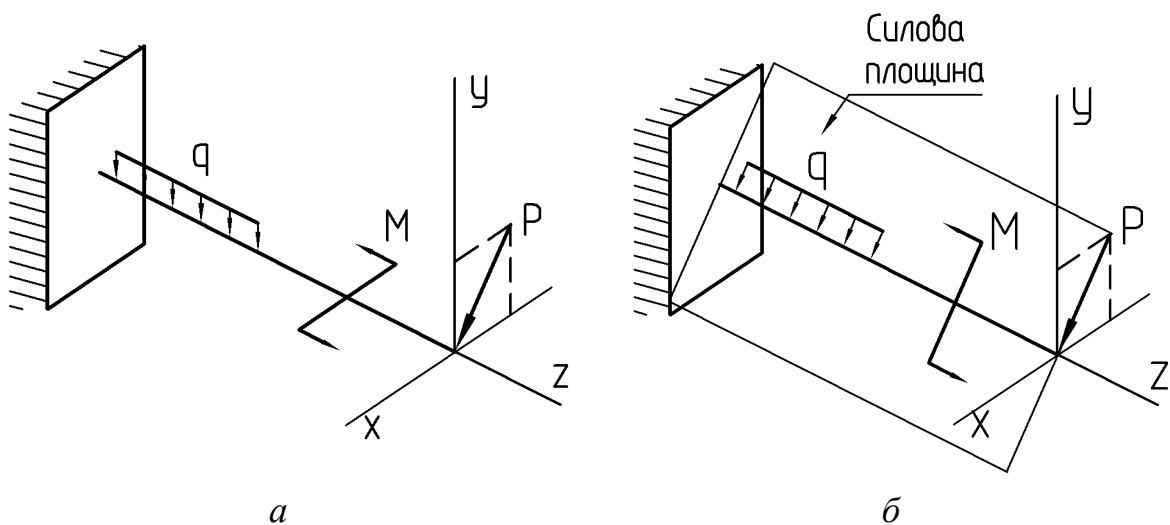


Рисунок 1.1

Нормальне напруження в точці з координатами x, y (рис. 1.2) можна визначити сумою напружень від згинальних моментів M_x та M_y , використовуючи принцип суперпозиції:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x, \quad (1.1)$$

де M_x, M_y – згинальні моменти відповідно до осей x та y ;
 x, y – координати точки, у якій визначається напруження;
 J_x, J_y – осьові моменти інерції всієї фігури відносно головних
 центральних осей фігури x та y .

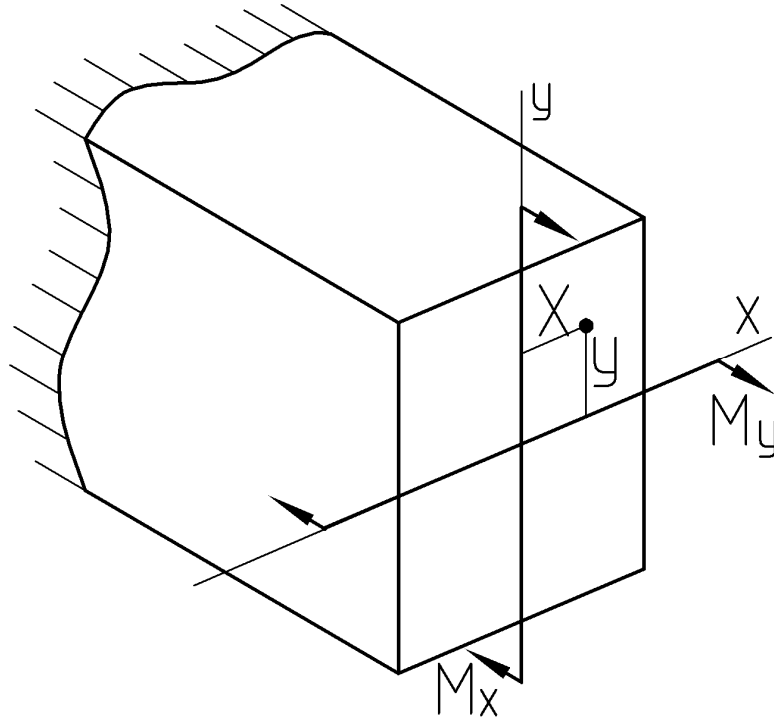


Рисунок 1.2

Нейтральною лінією називається геометричне місце точок поперечного перерізу, у яких нормальні напруження дорівнюють нулю. При складному та косому згинанні нейтральна лінія проходить через центр ваги перерізу та має кутовий коефіцієнт, обумовлений з виразу

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_x} \right|. \quad (1.2)$$

Якщо епюра нормальних напружень у перерізі балки буде лінійною, то максимальне напруження виникає в точці, яка найбільш віддалена від нейтральної лінії. Нехай координати цієї точки x_A, y_A , тоді максимальне напруження при складному та косому згинанні визначається за формулою

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} y_A + \frac{M_y}{J_y} x_A. \quad (1.3)$$

Умова міцності при складному та косому згинанні для несиметричного перерізу має вигляд

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} y_A + \frac{M_y}{J_y} x_A \leq [\sigma]. \quad (1.4)$$

Коли переріз симетричний відносно обох осей і має виступні кути, визначення найбільших напружень значно спрощується. Максимальне напруження в цьому випадку визначається за формулою

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}, \quad (1.5)$$

де W_x , W_y – осьові моменти опору перерізу.

Осьові моменти опору визначаються за формулами:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}, \quad W_y = \frac{J_y}{x_{\max}}. \quad (1.6)$$

Умова міцності при складному та косому згинанні для бісиметричного перерізу з виступними кутами має вигляд

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (1.7)$$

Задача 1.1

Визначити максимальні нормальні напруження для балки, яка зображена на рисунку 1.3, а. Переріз балки – на рисунку 1.3, б.

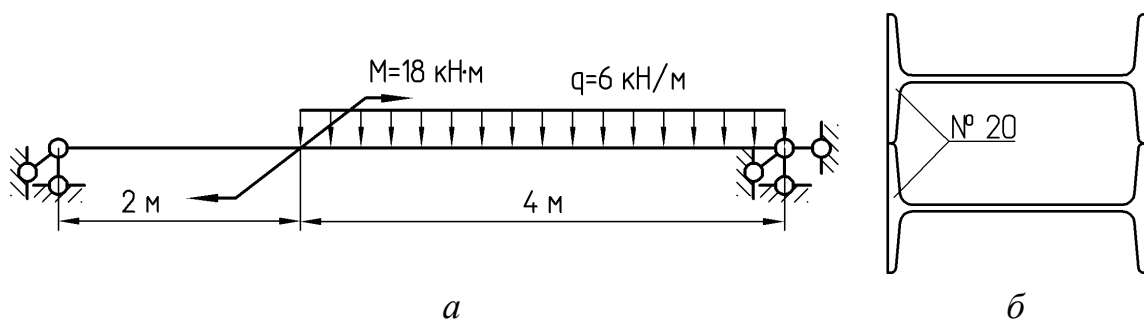


Рисунок 1.3

Розв'язання

1 Балка працює на просторове складне згинання (рис. 1.4, а). Розкладаємо навантаження на вертикальну та горизонтальну складові.

Розглянемо навантаження, що діє у вертикальній площині (див. рис. 1.4, б). У вертикальній площині діє розподілене навантаження q .

Визначаємо опорні реакції у вертикальній площині, дорівнюючи нулю суми моментів усіх зовнішніх сил відносно точок А та В (див. рис. 1.4, б):

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, \\ -q \cdot 4 \cdot 4 + 6R_B^y &= 0, \\ R_B^y &= \frac{q \cdot 4 \cdot 2}{6} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 4}{6} = 16 \text{ кН}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0, \\ q \cdot 4 \cdot 4 - 6R_A^y &= 0, \\ R_A^y &= \frac{q \cdot 4 \cdot 4}{6} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{6} = 8 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$\begin{aligned}-q \cdot 4 + R_A^y + R_B^y &= 0, \\ -6 \cdot 4 + 8 + 16 &= 0, \\ -24 + 24 &= 0, \\ 0 &= 0.\end{aligned}$$

Обчислюємо значення поперечних сил та згинальних моментів у характерних перерізах:

$$Q_{y1} = Q_{y2} = Q_{y3} = R_A^y = 8 \text{ кН},$$

$$Q_{y4} = -R_B^y = -16 \text{ кН}.$$

$$M_{x1} = M_{x4} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{x2} = M_{x3} = R_A^y \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюри по характерних перерізах (рис. 1.4, в, г).

Якщо еюра поперечних сил пересікає базову лінію та змінює знак з «+» на «-», то в цій точці буде максимальне значення згинального моменту. Знаходимо положення цього перерізу.

$$z_0 = \frac{16}{6} = 2,67 \text{ м},$$

$$M_{x5} = R_B^y z_0 - q z_0 \frac{z_0}{2} = 16 \cdot 2,67 - 6 \cdot 2,67 \cdot \frac{2,67}{2} = 21,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Розглянемо навантаження, яке діє в горизонтальній площині (рис. 1.4, д). У горизонтальній площині діє зосереджений момент M .

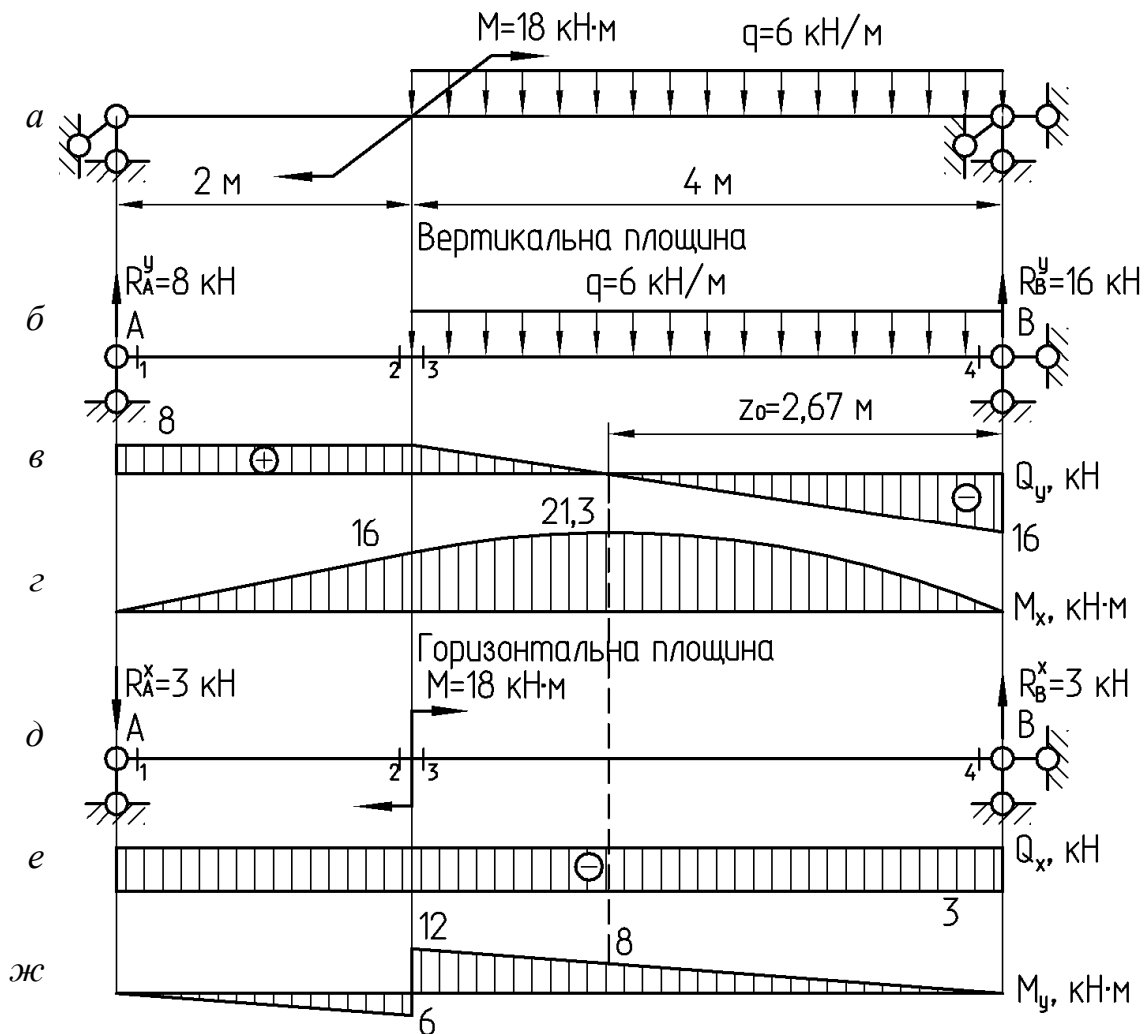


Рисунок 1.4

Визначаємо опорні реакції в горизонтальній площині, дорівнюючи нулю суми моментів усіх зовнішніх сил відносно точок А та В (рис. 1.4 д):

$$\sum M_A = 0,$$

$$-M + 6R_B^x = 0,$$

$$R_B^x = \frac{M}{6} = \frac{18}{6} = 3 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$-M + 6R_A^x = 0,$$

$$R_A^x = \frac{M}{6} = \frac{18}{6} = 3 \text{ кН.}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_x = 0$:

$$-R_A^x + R_B^x = 0,$$

$$-3 + 3 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Обчислюємо значення поперечних сил і згинальних моментів у характерних перерізах:

$$Q_{x1} = Q_{x2} = Q_{x3} = -R_A^x = -3 \text{ кН,}$$

$$Q_{x4} = -R_B^x = -3 \text{ кН.}$$

$$M_{y1} = M_{y4} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м,}$$

$$M_{y2} = -R_A^x \cdot 2 = -3 \cdot 2 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м,}$$

$$M_{y3} = R_B^x \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м,}$$

$$M_{y5} = R_B^x z_0 = 3 \cdot 2,67 = 8,0 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Будуємо епюри за характерними перерізами (рис. 1.4, е, ж).

Аналізуючи епюри згинальних моментів у вертикальній і горизонтальній площинах, визначаємо небезпечні перерізи. Для розглянутої балки із заданим навантаженням небезпечними перерізами є два перерізи:

– переріз 3 ($M_{x3} = 16 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_{y3} = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$);

– переріз 5 ($M_{x5} = 21,3 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_{y5} = 8,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$).

У даних перерізах в одній із площин діє максимальний згинальний момент.

Для того щоб визначити, який переріз є найнебезпечнішим, необхідно визначити максимальні напруження в кожному із цих перерізів.

2 Визначаємо геометричні характеристики перерізу (рис. 1.5).

Із сортаменту (додаток А) виписуємо геометричні характеристики двотаврів № 20:

$$\begin{aligned} H_1 = H_2 &= 20 \text{ см}, & J_{x1} = J_{x2} &= 115 \text{ см}^4, \\ B_1 = B_2 &= 10 \text{ см}, & J_{y1} = J_{y2} &= 1840 \text{ см}^4, \\ F_1 = F_2 &= 26,8 \text{ см}^2, \end{aligned}$$

Визначаємо положення центра ваги всього перерізу. Так як переріз симетричний відносно осей X , Y , то центр ваги всього перерізу C лежить на перетині цих осей, а осі симетрії є головними центральними осями X_c та Y_c .

Визначаємо осьові моменти інерції всього перерізу відносно головних центральних осей перерізу за формулами:

$$\begin{aligned} J_{x_c} &= \sum_{i=1}^n (J_{x_i} + a_i^2 F_i), & J_{y_c} &= \sum_{i=1}^n (J_{y_i} + b_i^2 F_i), \\ a_1 = a_2 &= \frac{B_1}{2} = 5 \text{ см}, & b_1 = b_2 &= 0 \text{ см}, \\ J_{x_c} &= 2 \cdot (115 + 5^2 \cdot 26,8) = 1570 \text{ см}^4, \\ J_{y_c} &= 2 \cdot 1840 = 3680 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

3 Розглянемо небезпечний переріз 3 ($M_{x3} = 16 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_{y3} = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$).

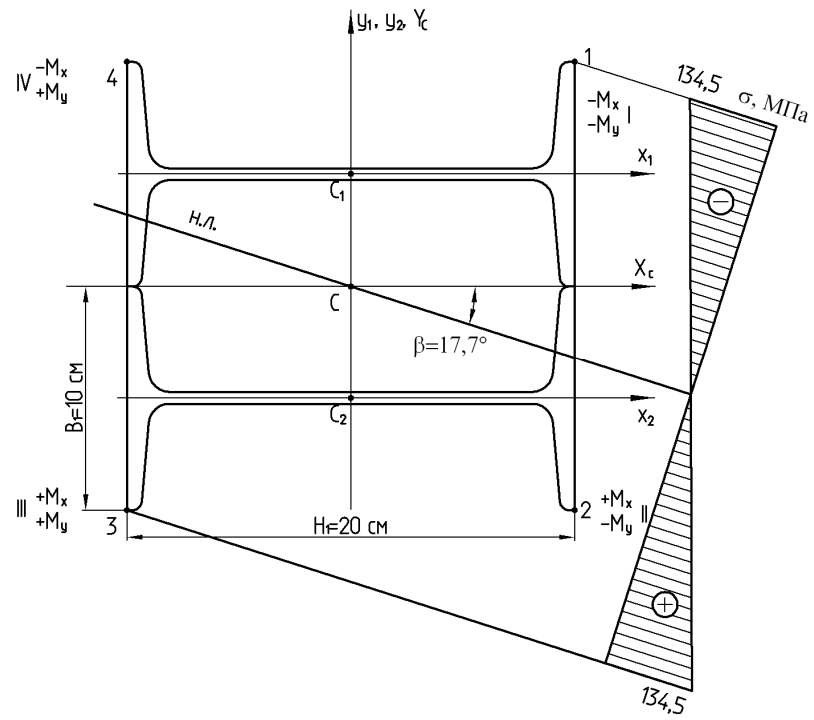
3.1 Визначаємо положення нейтральної лінії в небезпечному перерізі 3, обчислюючи кутовий коефіцієнт за формулою (1.2):

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{J_{x_c}}{J_{y_c}} \frac{M_{y3}}{M_{x3}} \right| = \left| \frac{1570}{3680} \cdot \frac{12}{16} \right| = 0,320.$$

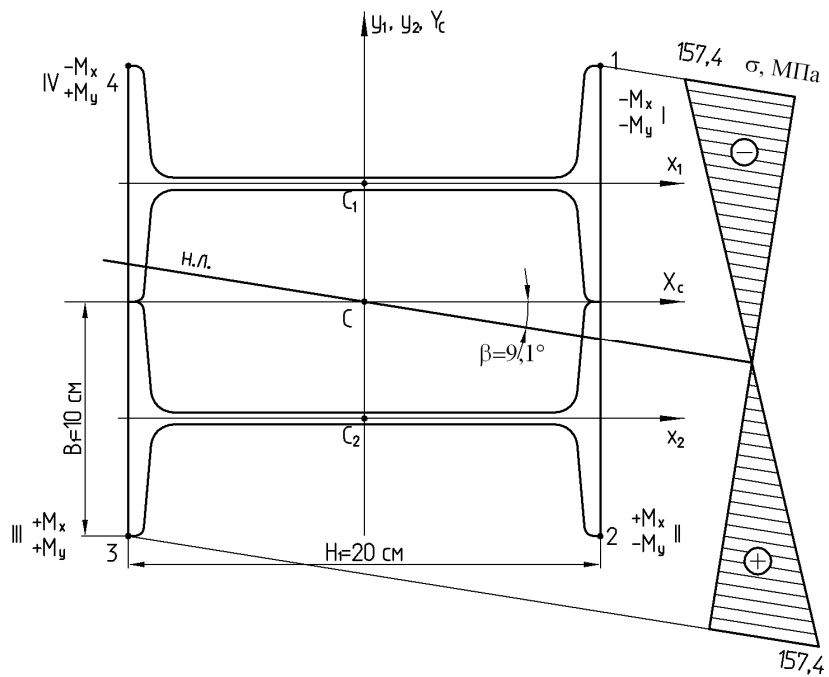
Отже, $\beta = 17,7^\circ$.

3.2 Установлюємо знаки напружень від кожного згинального моменту (рис. 1.5, а).

Розставимо в кутових точках небезпечного перерізу знаки згинальних моментів, а отже, і напружень, вважаючи момент, який викликає напруження розтягання додатним, а той, що викликає стискання, – від'ємним.



a



б

$$a - M_{x3} = 16 \text{ кН} \cdot \text{м}, M_{y3} = 12 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$б - M_{x5} = 21,3 \text{ кН} \cdot \text{м}, M_{y5} = 8,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Рисунок 1.5

Нейтральна лінія проходить завжди через ті квадранти перерізу, у яких виникають напруження стискання та розтягання, тобто знаки напружень протилежні.

У розглянутому перерізі нейтральна лінія пройде через II та IV квадранти (I квадрант утворений додатним напрямком координатних осей).

3.3 Визначаємо максимальні нормальні напруження для розглянутого перерізу.

Великі напруження виникають у найбільш віддалених від нейтральної лінії точках. Для розглянутого перерізу такими точками є точки 1 та 3 (див. рис. 1.5, а).

Якщо переріз симетричний відносно обох осей, то максимальні напруження визначаємо за формулою (1.5). Осьові моменти опору визначаємо за формулами (1.6):

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}, \quad W_y = \frac{J_y}{x_{\max}}.$$

Для розглянутого перерізу:

$$x_{\max} = \frac{H_1}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ см}, \quad y_{\max} = B_1 = 10 \text{ см}.$$

Отже,

$$W_x = \frac{J_{xc}}{y_{\max}} = \frac{1570}{10} = 157 \text{ см}^3, \quad W_y = \frac{J_y}{x_{\max}} = \frac{3680}{10} = 368 \text{ см}^3.$$

Якщо в точці 1 діють найбільші стискуючі напруження, то напруження в точці 1 визначаються за формулою

$$\sigma_{\max 1} = -\frac{M_{x3}}{W_x} - \frac{M_{y3}}{W_y} = -\frac{16 \times 10^{-3}}{157 \times 10^{-6}} - \frac{12 \times 10^{-3}}{368 \times 10^{-6}} = -134,5 \text{ МПа}.$$

Якщо в точці 3 діють найбільші напруження, які розтягують, то напруження в точці 3 визначаються за формулою

$$\sigma_{\max 1} = \frac{M_{x3}}{W_x} + \frac{M_{y3}}{W_y} = \frac{16 \times 10^{-3}}{157 \times 10^{-6}} + \frac{12 \times 10^{-3}}{368 \times 10^{-6}} = 134,5 \text{ МПа}.$$

3.4 Будуємо епюру нормальних напружень (див. рис. 1.5, а).

4 Розглянемо переріз 5 ($M_{x5} = 21,3 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_{y5} = 8,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$).

4.1 Визначаємо положення нейтральної лінії в перерізі 5, обчислюючи кутовий коефіцієнт за формулою (1.2):

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{J_{x_c}}{J_{y_c}} \frac{M_{y5}}{M_{x5}} \right| = \left| \frac{1570}{3680} \cdot \frac{8,0}{21,3} \right| = 0,160.$$

Отже, $\beta = 9,1^0$.

4.2 Встановлюємо знаки напружень від кожного згинального моменту (рис. 1.5, б).

У розглянутому перерізі нейтральна лінія пройде через II та IV квадранти (I квадрант утворений позитивним напрямком координатних осей).

4.3 Визначаємо максимальні нормальні напруження для розглянутого перерізу.

Найбільш віддаленими від нейтральної лінії точками є точки 1 та 3 (див. п. 3.3).

Отже,

$$\sigma_{\max 1} = -\frac{M_{x5}}{W_x} - \frac{M_{y5}}{W_y} = -\frac{21,3 \times 10^{-3}}{157 \times 10^{-6}} - \frac{8 \times 10^{-3}}{368 \times 10^{-6}} = -157,4 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\max 1} = \frac{M_{x5}}{W_x} + \frac{M_{y5}}{W_y} = \frac{21,3 \times 10^{-3}}{157 \times 10^{-6}} + \frac{8 \times 10^{-3}}{368 \times 10^{-6}} = 157,4 \text{ МПа}.$$

4.4 Будуємо епюру нормальних напружень (див. рис. 1.5, б).

5 Аналізуючи отримані епюри нормальних напружень, робимо висновки про те, що найнебезпечнішим перерізом є переріз 5, у якому діють згинальні моменти $M_{x5} = 21,3 \text{ кН} \cdot \text{м}$ та $M_{y5} = 8,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$ і виникають максимальні нормальні напруження $\sigma_{\max} = 157,4 \text{ МПа}$.

Задача 1.2

Визначити максимальні нормальні напруження для балки, яка подана на рисунку 1.6, а. Переріз балки показаний на рисунку 1.6, б.

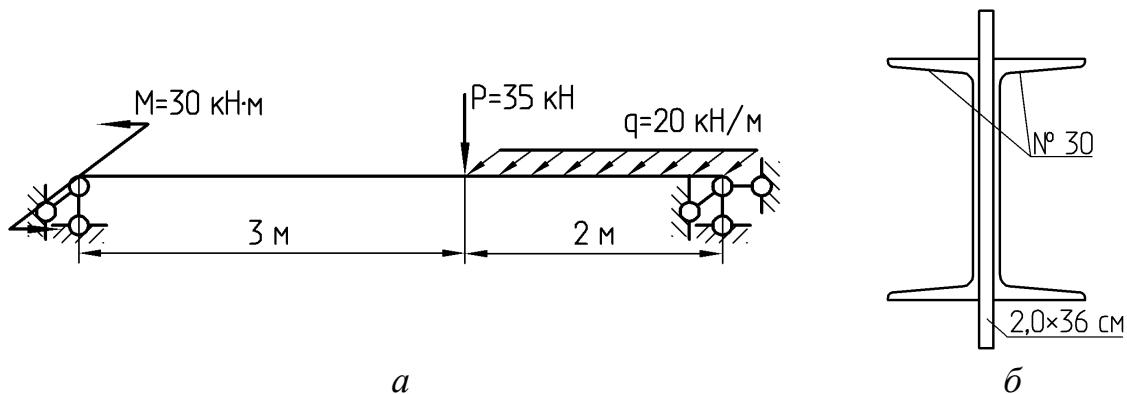


Рисунок 1.6

Розв'язання

1 Балка працює на складне згинання (рис. 1.7, а). Розкладаємо навантаження на вертикальну та горизонтальну складові.

Розглянемо навантаження, яке діє у вертикальній площині (рис. 1.7, б). У вертикальній площині діє зосереджена сила P .

Визначаємо опорні реакції у вертикальній площині, дорівнюючи нулю суми моментів усіх зовнішніх сил відносно точок А та В (див. рис. 1.7, б):

$$\sum M_A = 0,$$

$$-P \cdot 3 + R_B^y \cdot 5 = 0,$$

$$R_B^y = \frac{P \cdot 3}{5} = \frac{35 \cdot 3}{5} = 21 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$P \cdot 2 - R_A^y \cdot 5 = 0,$$

$$R_A^y = \frac{P \cdot 2}{5} = \frac{35 \cdot 2}{5} = 14 \text{ кН.}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$-P + R_A^y + R_B^y = 0,$$

$$-35 + 14 + 21 = 0,$$

$$-35 + 35 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Обчислюємо значення поперечних сил та згинальних моментів у характерних перерізах:

$$Q_{y1} = Q_{y2} = R_A^y = 14 \text{ кН,}$$

$$Q_{y4} = Q_{y3} = -R_B^y = -21 \text{ кН.}$$

$$M_{x1} = M_{x4} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м,}$$

$$M_{x2} = M_{x3} = R_A^y \cdot 3 = 14 \cdot 3 = 42 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

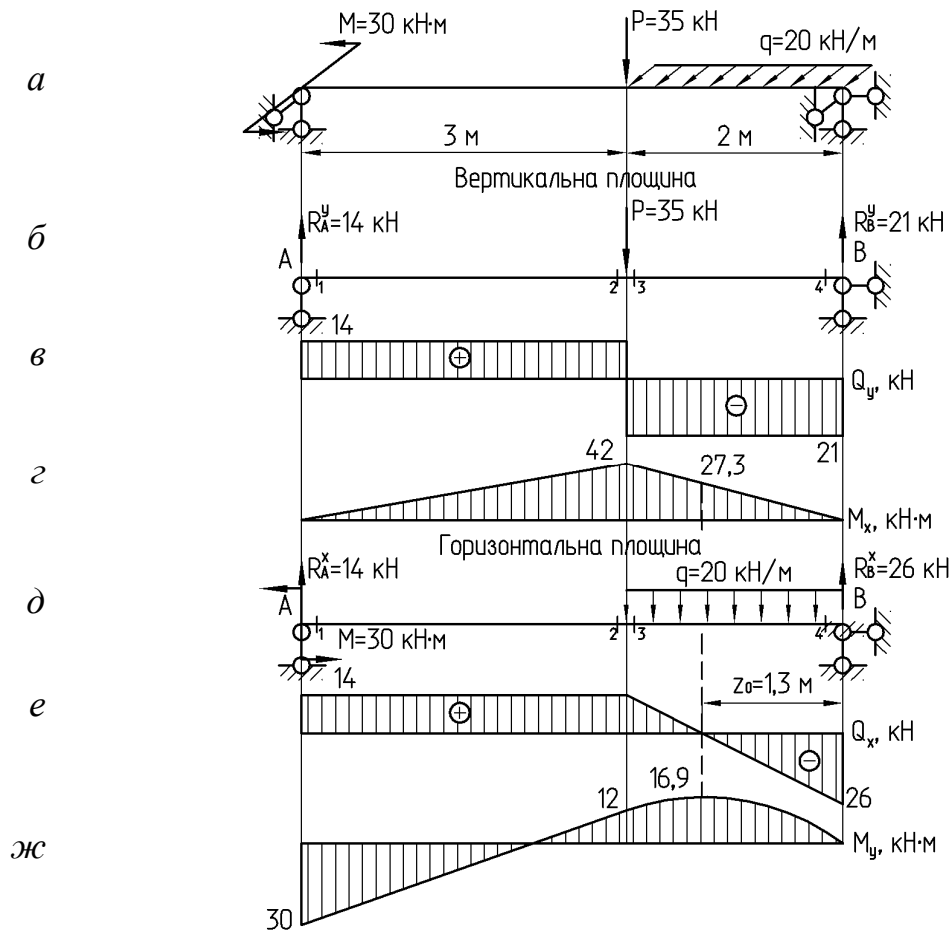


Рисунок 1.7

Будуємо епюри за характерними перерізами (рис. 1.7, в, г).

Розглянемо навантаження, яке діє в горизонтальній площині (рис. 1.7, д). У горизонтальній площині діє зосереджений момент M і розподілене навантаження q .

Визначаємо опорні реакції в горизонтальній площині, дорівнюючи нулю суми моментів усіх зовнішніх сил відносно точок A та B (див. рис. 1.7, д):

$$\sum M_A = 0,$$

$$M - q \cdot 2 \cdot 4 + R_B^x \cdot 5 = 0,$$

$$R_B^x = \frac{-M + q \cdot 2 \cdot 4}{5} = \frac{-30 + 20 \cdot 2 \cdot 4}{5} = 26 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$M + q \cdot 2 \cdot 1 - R_A^x \cdot 5 = 0,$$

$$R_A^x = \frac{M + q \cdot 2 \cdot 1}{5} = \frac{30 + 20 \cdot 2 \cdot 1}{5} = 14 \text{ кН.}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_x = 0$:

$$-q \cdot 2 + R_A^x + R_B^x = 0,$$

$$-20 \cdot 2 + 14 + 26 = 0,$$

$$-40 + 40 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Обчислюємо значення поперечних сил і згинальних моментів у характерних перерізах:

$$Q_{x1} = Q_{x2} = Q_{x3} = R_A^x = 14 \text{ кН},$$

$$Q_{x4} = -R_B^x = -26 \text{ кН}.$$

$$M_{y1} = -M = -30 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{y2} = M_{y3} = -M + R_A^x \cdot 3 = -30 + 14 \cdot 3 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{y4} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюри за характерними перерізами (рис. 1.7, е, ж).

Якщо епюра поперечних сил пересікає базову лінію та змінює знак з «+» на «-», то в цій точці маємо максимальне значення згинального моменту. Знаходимо положення цього перерізу:

$$z_0 = \frac{26}{20} = 1,3 \text{ м}.$$

Визначаємо значення згинальних моментів у вертикальній і горизонтальній площинах у п'ятому перерізі:

$$M_{y5} = R_B^x z_0 - q z_0 \frac{z_0}{2} = 26 \cdot 1,3 - 20 \cdot 1,3 \cdot \frac{1,3}{2} = 16,9 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$M_{x5} = R_B^y z_0 = 21 \cdot 1,3 = 27,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Аналізуючи епюри згинальних моментів у вертикальній та горизонтальній площинах, визначаємо небезпечні перерізи. Для розглянутої балки із заданим навантаженням небезпечними перерізами є два перерізи:

– переріз 3 ($M_{x3} = 42 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_{y3} = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$);

– переріз 5 ($M_{x5} = 27,3 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_{y5} = 16,9 \text{ кН} \cdot \text{м}$).

У даних перерізах в одній із площин діє максимальний згинальний момент.

Для того щоб визначити, який переріз є найнебезпечнішим, необхідно визначити максимальні напруження в кожному із цих перерізів.

2 Визначаємо геометричні характеристики перерізу (рис. 1.8).

Із сортаменту виписуємо геометричні характеристики швелерів № 30:

$$\begin{aligned} H_1 = H_2 = 30 \text{ см}, & F_1 = F_2 = 40,5 \text{ см}^2, \\ B_1 = B_2 = 10 \text{ см}, & J_{x1} = J_{x2} = 5810 \text{ см}^4, \\ z_{01} = z_{02} = 2,52 \text{ см}, & J_{y1} = J_{y2} = 327 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Обчислюємо геометричні характеристики смуги 2х36 см:

$$\begin{aligned} H_3 = 36 \text{ см}, B_3 = 2 \text{ см}, & J_{x3} = \frac{B_3 H_3^3}{12} = \frac{2 \cdot 36^3}{12} = 7776 \text{ см}^4, \\ F_3 = H_3 B_3 = 36 \cdot 2 = 72 \text{ см}^2, & J_{y3} = \frac{H_3 B_3^3}{12} = \frac{36 \cdot 2^3}{12} = 24 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Визначаємо положення центра ваги всього перерізу. Якщо переріз симетричний відносно осей X, Y, то центр ваги всього перерізу С лежить на перетинанні цих осей, а осі симетрії є головними центральними осями X_c та Y_c .

Визначаємо осьові моменти інерції всього перерізу відносно головних центральних осей фігури за формулами:

$$J_{x_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_i} + a_i^2 F_i), \quad J_{y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{y_i} + b_i^2 F_i).$$

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = a_3 = 0 \text{ см}, & b_1 = b_2 = \frac{B_3}{2} + z_{01} = \\ & = \frac{2}{2} + 2,52 = 3,52 \text{ см}, \\ & b_3 = 0 \text{ см}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{x_c} &= 2 \cdot 5810 + 7776 = 19396 \text{ см}^4, \\ J_{y_c} &= 2 \cdot (327 + 3,52^2 \cdot 40,5) + 24 = 1682 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

3 Розглянемо небезпечний переріз 3 ($M_{x3} = 42 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_{y3} = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$).

3.1 Визначаємо положення нейтральної лінії в небезпечному перерізі 3, обчислюючи кутовий коефіцієнт за формулою (1.2):

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{J_{x_c}}{J_{y_c}} \frac{M_{y3}}{M_{x3}} \right| = \left| \frac{19396}{1682} \cdot \frac{12}{42} \right| = 3,295.$$

Отже, $\beta = 73,1^\circ$.

3.2 Установлюємо знаки напружень від кожного згинального моменту (рис. 1.8, а).

У розглянутому перерізі нейтральна лінія пройде через II та IV квадранти (I квадрант утворений додатнім напрямком координатних осей).

3.3 Визначаємо максимальні нормальні напруження для розглянутого перерізу.

Максимальні напруження визначаємо за формулою

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} y_A + \frac{M_y}{J_y} x_A.$$

Великі напруження виникають у найбільш віддалених від нейтральної лінії точках. Для розглянутого перерізу такими точками є точки 2 та 6 (див. рис. 1.8, а).

Якщо в точці 2 діють найбільші стискаючі напруження, то напруження в точці 2 визначаються за формулою

$$\sigma_2 = -\frac{M_x}{J_x} y_2 - \frac{M_y}{J_y} x_2.$$

Якщо в точці 6 діють найбільші напруження, які розтягують, то напруження в точці 6 визначаються за формулою

$$\sigma_6 = \frac{M_x}{J_x} y_6 + \frac{M_y}{J_y} x_6.$$

Для розглянутого перерізу:

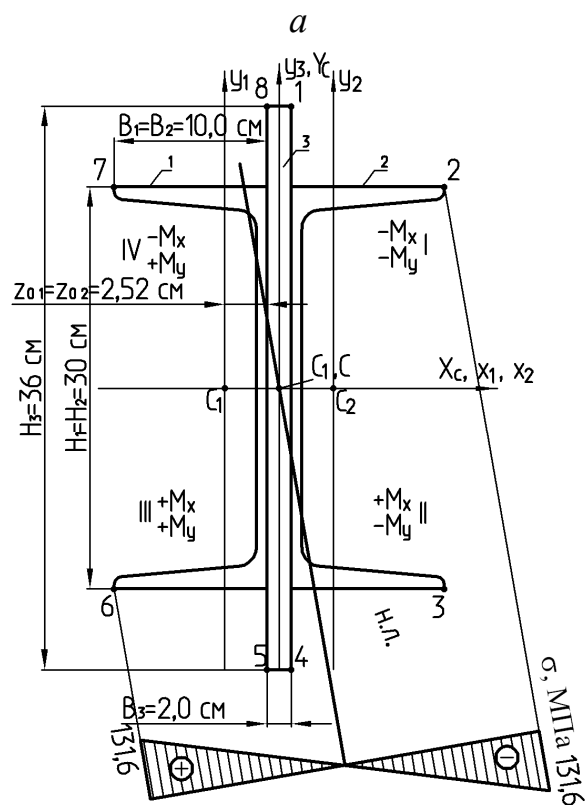
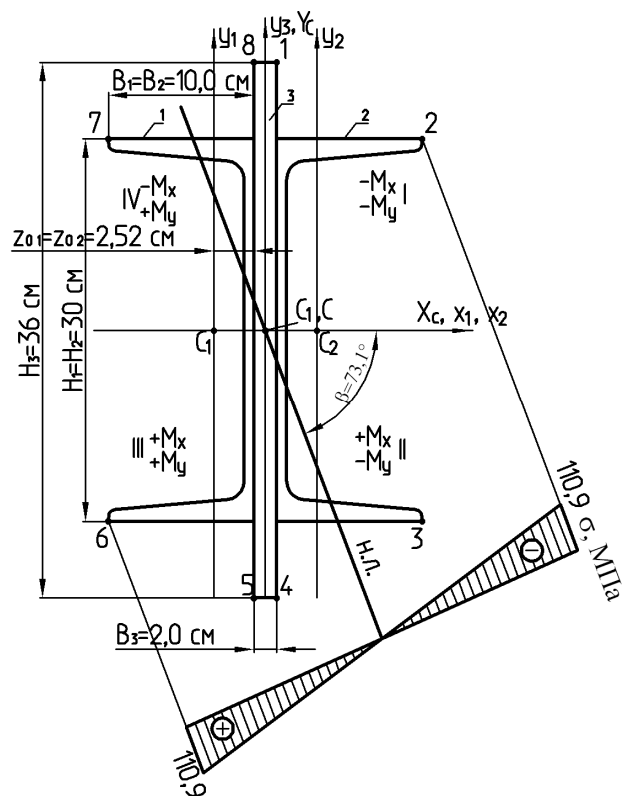
$$x_2 = x_6 = \frac{B_3}{2} + B_1 = \frac{2}{2} + 10 = 11 \text{ см}, \quad y_2 = y_6 = \frac{H_1}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ см}.$$

Отже,

$$\sigma_2 = -\frac{42 \times 10^{-3}}{19396 \times 10^{-8}} \cdot 15 \times 10^{-2} - \frac{12 \times 10^{-3}}{1682 \times 10^{-8}} \cdot 11 \times 10^{-2} = -110,9 \text{ МПа},$$

$$\sigma_6 = \frac{42 \times 10^{-3}}{19396 \times 10^{-8}} \cdot 15 \times 10^{-2} + \frac{12 \times 10^{-3}}{1682 \times 10^{-8}} \cdot 11 \times 10^{-2} = 110,9 \text{ МПа}.$$

3.4 Будемо епюру нормальних напружень (див. рис. 1.8, а).



б

а — $M_{x3} = 42 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_{y3} = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$,

б — $M_{x5} = 27,3 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_{y5} = 16,9 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Рисунок 1.8

4 Розглянемо небезпечний переріз 5 ($M_{x5} = 27,3 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_{y5} = 16,9 \text{ кН} \cdot \text{м}$).

4.1 Визначаємо положення нейтральної лінії в перерізі 5, обчислюючи кутовий коефіцієнт за формулою (1.2):

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{J_{x_c}}{J_{y_c}} \frac{M_{y5}}{M_{x5}} \right| = \left| \frac{19396}{1682} \cdot \frac{16,9}{27,3} \right| = 7,139.$$

Отже, $\beta = 82,0^\circ$.

4.2 Установлюємо знаки напружень від кожного згинального моменту (рис. 1.8, б).

У розглянутому перерізі нейтральна лінія пройде через II та IV квадранти (I квадрант утворений додатнім напрямком координатних осей).

4.3 Визначаємо максимальні нормальні напруження для розглянутого перерізу.

Найбільш віддаленими від нейтральної лінії точками є точки 2 та 6 (див. п. 3.3).

Отже,

$$\sigma_2 = -\frac{27,3 \times 10^{-3}}{19396 \times 10^{-8}} \cdot 15 \times 10^{-2} - \frac{16,9 \times 10^{-3}}{1682 \times 10^{-8}} \cdot 11 \times 10^{-2} = -131,6 \text{ МПа},$$

$$\sigma_6 = \frac{27,3 \times 10^{-3}}{19396 \times 10^{-8}} \cdot 15 \times 10^{-2} + \frac{16,9 \times 10^{-3}}{1682 \times 10^{-8}} \cdot 11 \times 10^{-2} = 131,6 \text{ МПа}.$$

4.4 Будуємо епюру нормальних напружень (див. рис. 1.8, б).

5 Аналізуючи отримані епюри нормальних напружень, робимо висновки про те, що найнебезпечнішим перерізом є переріз 5, у якому діють згинальні моменти $M_{x5} = 27,3 \text{ кН} \cdot \text{м}$ та $M_{y5} = 16,9 \text{ кН} \cdot \text{м}$ і виникають максимальні нормальні напруження $\sigma_{\max} = 131,6 \text{ МПа}$.

Задача 1.3

Визначити максимальні нормальні напруження для балки, яка подана на рисунку 1.9, а. Переріз балки показано на рисунку 1.9, б.

Розв'язання

1 Балка працює на складне згинання (рис. 1.10, а). Розкладаємо навантаження на вертикальну та горизонтальну складові.

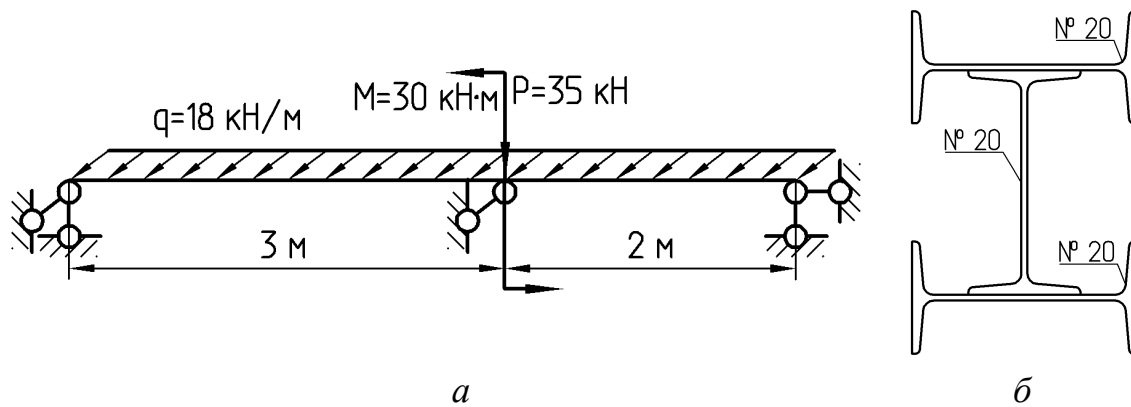


Рисунок 1.9

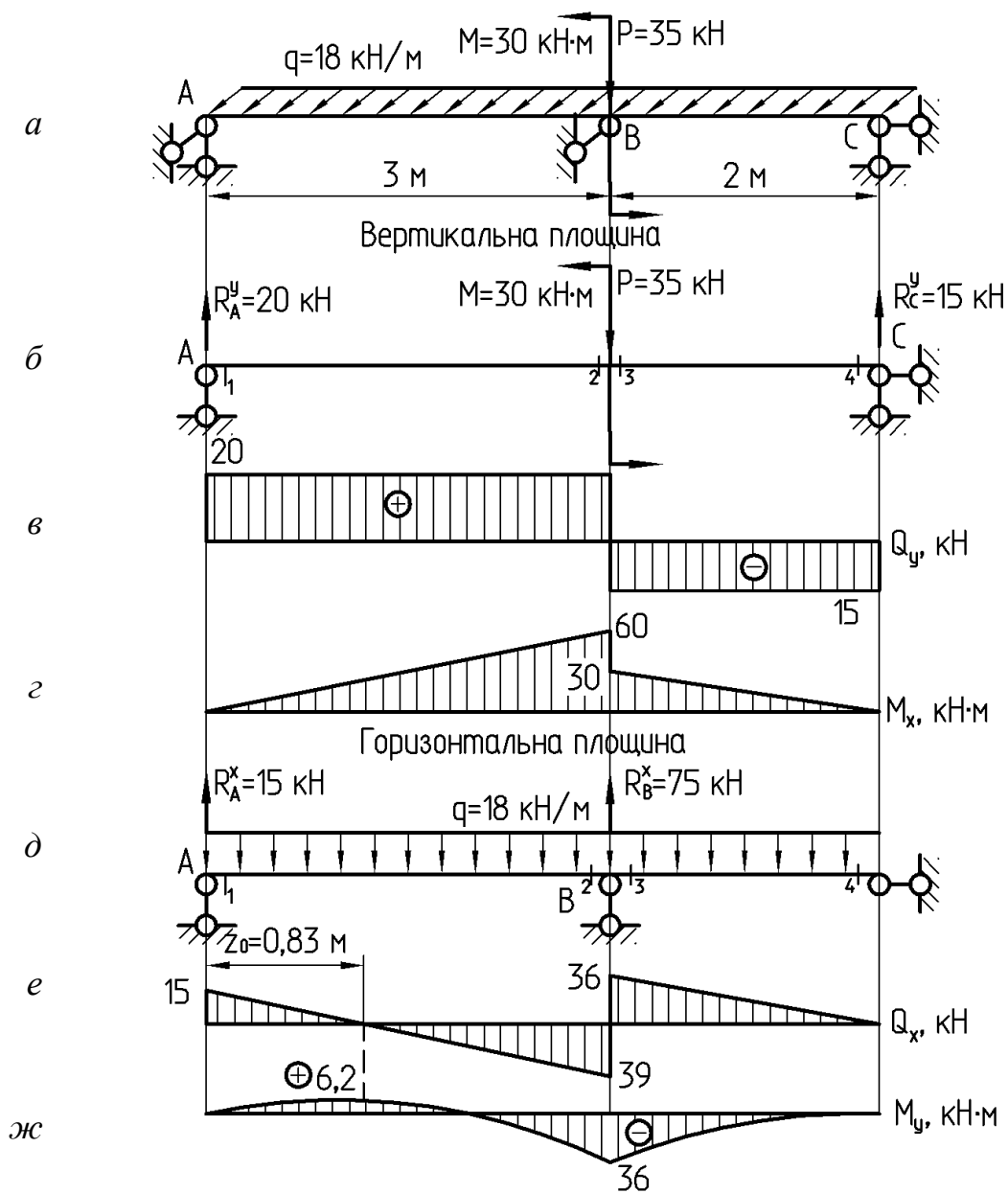


Рисунок 1.10

Розглянемо навантаження, яке діє у вертикальній площині (рис. 1.10, б). У вертикальній площині діє зосереджена сила P та зосереджений момент M .

Визначаємо опорні реакції у вертикальній площині, дорівнюючи до нуля суми моментів усіх зовнішніх сил відносно точок A і C (див. рис. 1.10, б):

$$\sum M_A = 0,$$

$$M - P \cdot 3 + R_C^y \cdot 5 = 0,$$

$$R_C^y = \frac{-M + P \cdot 3}{5} = \frac{-30 + 35 \cdot 3}{5} = 15 \text{ кН}.$$

$$\sum M_C = 0,$$

$$M + P \cdot 2 - R_A^y \cdot 5 = 0,$$

$$R_A^y = \frac{M + P \cdot 2}{5} = \frac{30 + 35 \cdot 2}{5} = 20 \text{ кН}.$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$-P + R_A^y + R_C^y = 0,$$

$$-35 + 20 + 15 = 0,$$

$$-35 + 35 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Обчислюємо значення поперечних сил і згинальних моментів у характерних перерізах:

$$Q_{y1} = Q_{y2} = R_A^y = 20 \text{ кН},$$

$$Q_{y4} = Q_{y3} = -R_C^y = -15 \text{ кН}.$$

$$M_{x1} = M_{x4} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{x2} = R_A^y \cdot 3 = 20 \cdot 3 = 60 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{x3} = R_A^y \cdot 3 - M = 20 \cdot 3 - 30 = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюри за характерними перерізами (рис. 1.10, в, г).

Розглянемо навантаження, яке діє в горизонтальній площині (рис. 1.10, д). У горизонтальній площині діє розподілене навантаження q .

Визначаємо опорні реакції в горизонтальній площині, дорівнюючи нулю суми моментів всіх зовнішніх сил відносно точок А та В (див. рис. 1.10, д):

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, \\ -q \cdot 5 \cdot 2,5 + R_B^x \cdot 3 &= 0, \\ R_B^x &= \frac{q \cdot 5 \cdot 2,5}{3} = \frac{18 \cdot 5 \cdot 2,5}{3} = 75 \text{ кН}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0, \\ q \cdot 3 \cdot 1,5 - q \cdot 2 \cdot 1 - R_A^x \cdot 3 &= 0, \\ R_A^x &= \frac{q \cdot 3 \cdot 1,5 - q \cdot 2 \cdot 1}{3} = \frac{18 \cdot 3 \cdot 1,5 - 18 \cdot 2 \cdot 1}{3} = 15 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_x = 0$:

$$\begin{aligned}-q \cdot 5 + R_A^x + R_B^x &= 0, \\ -18 \cdot 5 + 15 + 75 &= 0, \\ -90 + 90 &= 0, \\ 0 &= 0.\end{aligned}$$

Обчислюємо значення поперечних сил та згинальних моментів у характерних перерізах:

$$\begin{aligned}Q_{x1} &= R_A^x = 15 \text{ кН}, \\ Q_{x2} &= R_A^x - q \cdot 3 = 15 - 18 \cdot 3 = -39 \text{ кН}, \\ Q_{x4} &= 0 \text{ кН}, \\ Q_{x3} &= q \cdot 2 = 18 \cdot 2 = 36 \text{ кН}, \\ M_{y1} &= M_{y4} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M_{y2} &= M_{y3} = -q \cdot 2 \cdot 1 = -18 \cdot 2 \cdot 1 = -36 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

Будуємо епюри за характерними перерізами (рис. 1.10, е, ж).

Якщо епюра поперечних сил пересікає базову лінію та змінює знак з «+» на «-», то в цій точці маємо максимальне значення згинального моменту. Знаходимо положення цього перерізу:

$$z_0 = \frac{15}{18} = 0,83 \text{ м.}$$

$$M_{y5} = R_A^x z_0 - q z_0 \frac{z_0}{2} = 15 \cdot 0,83 - 18 \cdot 0,83 \cdot \frac{0,83}{2} = 6,2 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Аналізуючи епюри згинальних моментів у вертикальній і горизонтальній площинах, визначаємо небезпечний переріз. Для розглянутої балки із заданим навантаженням небезпечним перерізом є один переріз – переріз 2 ($M_{x2} = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_{y2} = 36 \text{ кН} \cdot \text{м}$).

2 Визначаємо геометричні характеристики перерізу (рис. 1.11).

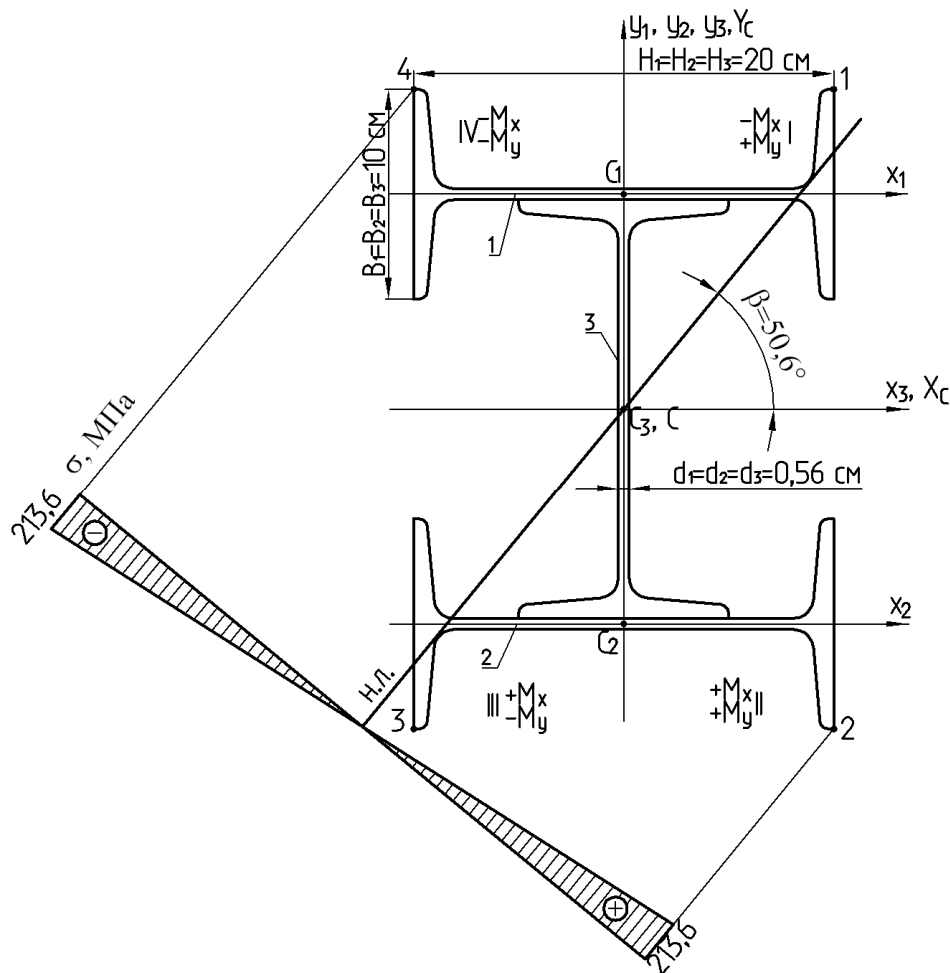


Рисунок 1.11

Із сортаменту (додаток А) виписуємо геометричні характеристики двотаврів № 20:

$$\begin{aligned}H_1 &= H_2 = H_3 = 20 \text{ см}, \\B_1 &= B_2 = B_3 = 10 \text{ см}, \\d_1 &= d_2 = d_3 = 0,52 \text{ см}, \\F_1 &= F_2 = F_3 = 26,8 \text{ см}^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_{x1} &= J_{x2} = 115 \text{ см}^4, \\J_{y1} &= J_{y2} = 1840 \text{ см}^4, \\J_{x3} &= 1840 \text{ см}^4, \\J_{y3} &= 115 \text{ см}^4.\end{aligned}$$

Визначаємо положення центра ваги всього перерізу. Якщо переріз симетричний відносно осей X , Y , то центр ваги всього перерізу C лежить на перетинанні цих осей, а осі симетрії є осями X_c та Y_c .

Визначаємо осьові моменти інерції всього перерізу відносно головних центральних осей фігури за формулами:

$$\begin{aligned}J_{x_c} &= \sum_{i=1}^n (J_{x_i} + a_i^2 F_i), & J_{y_c} &= \sum_{i=1}^n (J_{y_i} + b_i^2 F_i), \\a_1 = a_2 &= \frac{H_3}{2} + \frac{d_1}{2} = \frac{20}{2} + \frac{0,52}{2} = 10,26 \text{ см}, & b_1 = b_2 = b_3 &= 0 \text{ см}, \\a_3 &= 0 \text{ см}, \\J_{x_c} &= 2 \cdot (115 + 10,26^2 \cdot 26,8) + 1840 = 7712 \text{ см}^4, \\J_{y_c} &= 2 \cdot 1840 + 115 = 3795 \text{ см}^4.\end{aligned}$$

3 Розглянемо переріз 2 ($M_{x2} = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_{y2} = 36 \text{ кН} \cdot \text{м}$).

3.1 Визначаємо положення нейтральної лінії в перерізі 2, обчислюючи кутовий коефіцієнт за формулою (1.2):

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{J_{x_c}}{J_{y_c}} \frac{M_{y2}}{M_{x2}} \right| = \left| \frac{7712}{3795} \cdot \frac{36}{60} \right| = 1,219.$$

Отже, $\beta = 50,6^\circ$.

3.2 Установлюємо знаки напружень від кожного згинального моменту (див. рис. 1.11).

У розглянутому перерізі нейтральна лінія пройде через I та III квадранти (I квадрант утворений додатнім напрямком координатних осей).

3.3 Визначаємо максимальні нормальні напруження для розглянутого перерізу.

Максимальні напруження визначаємо за формулою (1.3).

Великі напруження виникають у найбільш віддалених від нейтральної лінії точках. Для розглянутого перерізу такими точками є точки 2 та 4 (див. рис. 1.11).

Якщо в точці 2 діють найбільші розтяжні напруження, то напруження в точці 2 визначаються за формулою

$$\sigma_2 = \frac{M_x}{J_x} y_2 + \frac{M_y}{J_y} x_2.$$

Якщо в точці 4 діють найбільші стискаючі напруження, то напруження в точці 4 визначаються за формулою

$$\sigma_4 = -\frac{M_x}{J_x} y_4 - \frac{M_y}{J_y} x_4.$$

Для розглянутого перерізу:

$$x_2 = x_4 = \frac{H_1}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ см},$$

$$y_2 = y_4 = \frac{H_3}{2} + \frac{B_1}{2} + \frac{d_1}{2} = \frac{20}{2} + \frac{10}{2} + \frac{0,52}{2} = 15,26 \text{ см}.$$

Отже,

$$\sigma_2 = \frac{60 \times 10^{-3}}{7712 \times 10^{-8}} \cdot 15,26 \times 10^{-2} + \frac{36 \times 10^{-3}}{3795 \times 10^{-8}} \cdot 10 \times 10^{-2} = 213,6 \text{ МПа},$$

$$\sigma_4 = -\frac{60 \times 10^{-3}}{7712 \times 10^{-8}} \cdot 15,26 \times 10^{-2} - \frac{36 \times 10^{-3}}{3795 \times 10^{-8}} \cdot 10 \times 10^{-2} = -213,6 \text{ МПа}.$$

3.4 Будуємо епюру нормальних напружень (див. рис. 1.11).

Задача 1.4

Визначити максимальні нормальні напруження для балки, яка подана на рисунку 1.12, а. Переріз балки показано на рисунку 1.12, б.

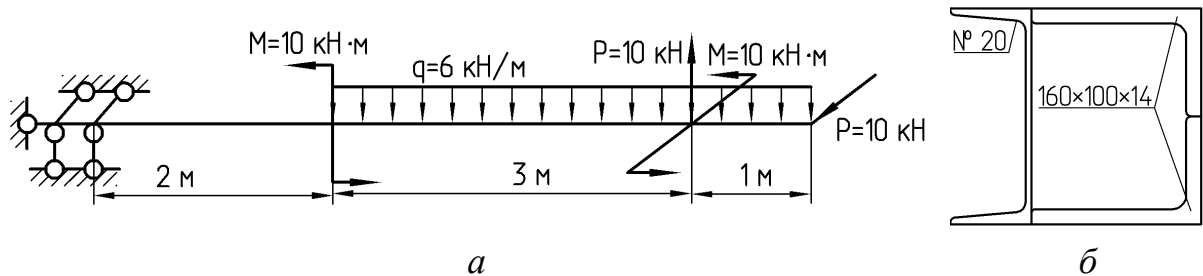


Рисунок 1.12

Розв'язання

1 Балка працює на складне згинання (рис. 1.13, а). Розкладаємо навантаження на вертикальну та горизонтальну складові.

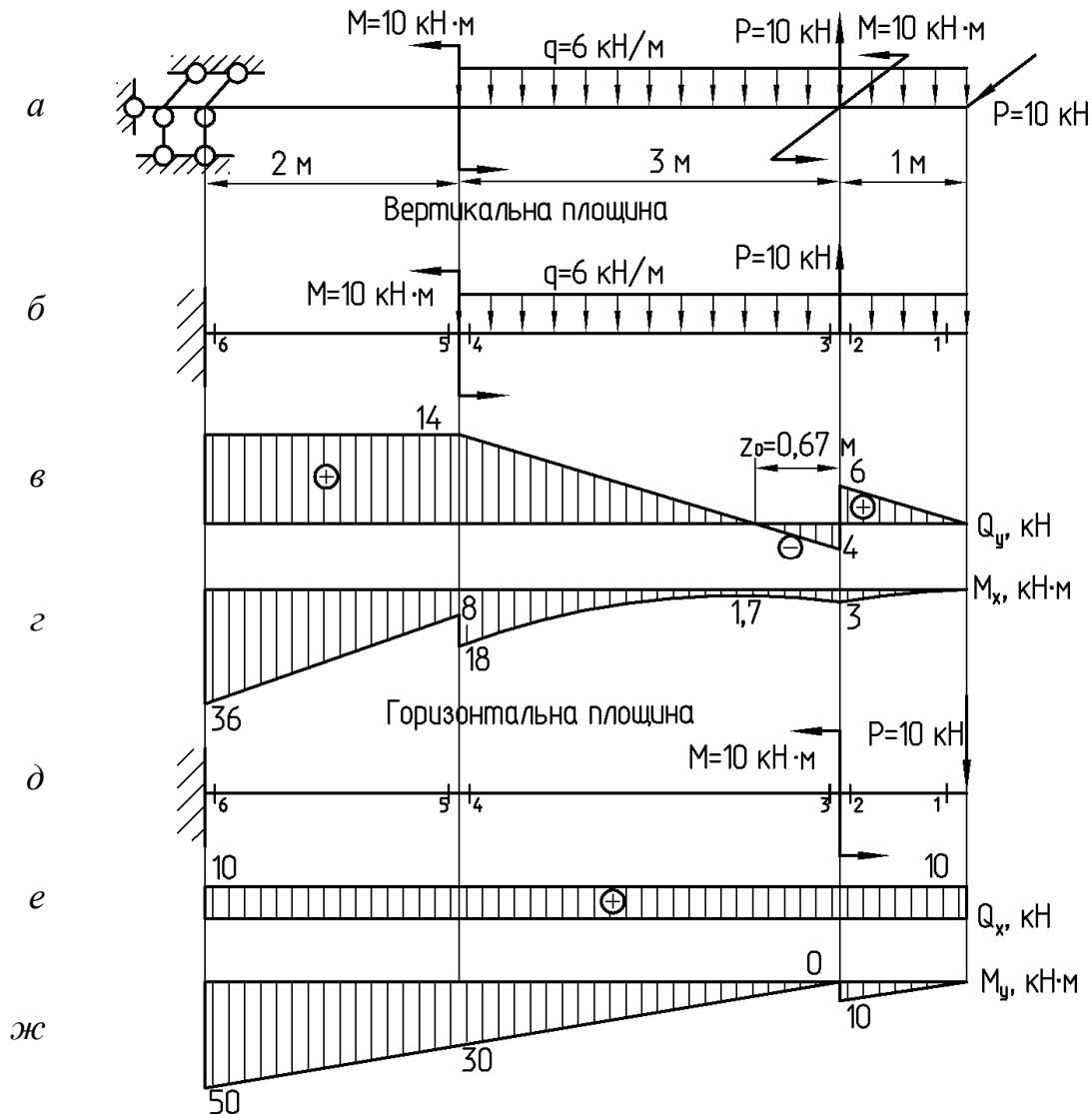


Рисунок 1.13

Розглянемо навантаження, що діє у вертикальній площині (рис. 1.13, б). У вертикальній площині діє зосереджена сила P , зосереджений момент M і розподілене навантаження q .

Обчислюємо значення поперечних сил і згинальних моментів у характерних перерізах. Побудову епюр починаємо із правого (вільного) кінця, при цьому немає необхідності у визначенні опорних реакцій.

$$Q_{y1} = 0 \text{ кН},$$

$$Q_{y2} = q \cdot 1 = 6 \cdot 1 = 6 \text{ кН},$$

$$Q_{y3} = q \cdot 1 - P = 6 \cdot 1 - 10 = -4 \text{ кН},$$

$$Q_{y4} = Q_{y5} = Q_{y6} = q \cdot 4 - P = 6 \cdot 4 - 10 = 14 \text{ кН},$$

$$M_{x1} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{x2} = M_{x3} = -q \cdot 1 \cdot 0.5 = -6 \cdot 1 \cdot 0.5 = -3 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{x4} = -q \cdot 4 \cdot 2 + P \cdot 3 = -6 \cdot 4 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = -18 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{x5} = -q \cdot 4 \cdot 2 + P \cdot 3 + M = -6 \cdot 4 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 10 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{x6} = -q \cdot 4 \cdot 4 + P \cdot 5 + M = -6 \cdot 4 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 10 = -36 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюри за характерними перерізами (див. рис. 1.13, в, г).

Розглянемо навантаження, яке діє в горизонтальній площині (рис. 1.13, д). У горизонтальній площині діє зосереджена сила P та зосереджений момент M .

Обчислюємо значення поперечних сил та згинальних моментів у характерних перерізах:

$$Q_{x1} = Q_{x2} = Q_{x3} = Q_{x4} = Q_{x5} = Q_{x6} = P = 10 \text{ кН},$$

$$M_{y1} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{y2} = -P \cdot 1 = -10 \cdot 1 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{y3} = -P \cdot 1 + M = -10 \cdot 1 + 10 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{y4} = M_{y5} = -P \cdot 4 + M = -10 \cdot 4 + 10 = -30 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{y6} = -P \cdot 6 + M = -10 \cdot 6 + 10 = -50 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюри за характерними перерізами (рис. 1.13, е, ж).

Якщо епюра поперечних сил пересікає базову лінію та змінює знак з «+» на «-», то в цій точці маємо екстремальне значення згинального моменту. Знаходимо положення цього перерізу:

$$z_0 = \frac{4}{6} = 0,67 \text{ м}.$$

$$M_{x7} = Pz_0 - q(1 + z_0) \frac{(1 + z_0)}{2} = 10 \cdot 0,67 - 6 \cdot 0,67 \cdot \frac{0,67}{2} = 1,7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Аналізуючи епюри згинальних моментів у вертикальній та горизонтальній площинах, визначаємо небезпечний переріз. Для розглянутої балки із заданим навантаженням небезпечним перерізом є один переріз – переріз 6 ($M_{x6} = 36 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_{y6} = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}$).

2 Визначаємо геометричні характеристики перерізу (рис. 1.14).

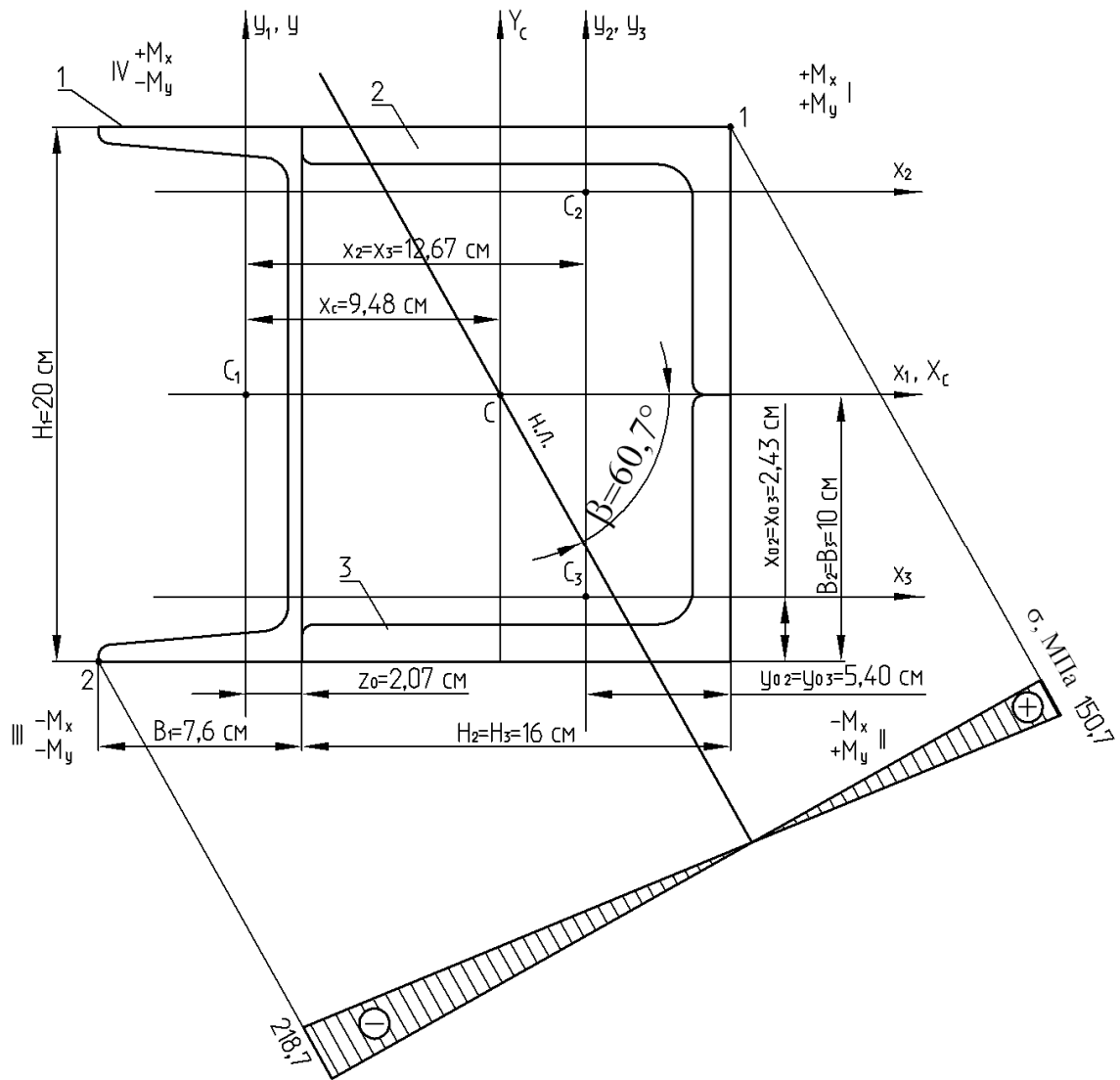


Рисунок 1.14

Із сортаменту (додаток Б) виписуємо геометричні характеристики швелера № 20:

$$\begin{aligned} H_1 &= 20 \text{ см}, \\ B_1 &= 7,6 \text{ см}, \\ z_{01} &= 2,07 \text{ см}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1 &= 23,4 \text{ см}^2, \\ J_{x1} &= 1520 \text{ см}^4, \\ J_{y1} &= 113 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Із сортаменту (додаток Г) виписуємо геометричні характеристики кутиків 160x100x14:

$$\begin{aligned} H_2 &= H_3 = 16 \text{ см}, \\ B_2 &= B_3 = 10 \text{ см}, \\ x_{02} &= x_{03} = 2,43 \text{ см}, \\ y_{02} &= y_{03} = 5,40 \text{ см}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2 &= F_3 = 34,7 \text{ см}^2, \\ J_{x2} &= J_{x3} = 272 \text{ см}^4, \\ J_{y2} &= J_{y3} = 897 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Визначаємо положення центра ваги всього перерізу. Якщо переріз симетричний відносно осі X , то центр ваги лежить на ній. Визначаємо координату центра ваги складної фігури відносно початкової системи осей за формулою

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}.$$

Знаходимо координати центра ваги i -ї фігури відносно початкової системи осей:

$$x_1 = 0 \text{ см}, \quad x_2 = x_3 = z_0 + H_2 - y_{02} = 2,07 + 16 - 5,40 = 12,67 \text{ см}.$$

Отже,

$$x_c = \frac{2 \cdot 12,67 \cdot 34,7}{23,4 + 2 \cdot 34,7} = 9,48 \text{ см}.$$

За знайденою координатою X_c наносимо положення центра ваги складної фігури (див. рис. 1.14).

Визначаємо осьові моменти інерції всього перерізу відносно головних центральних осей фігури за формулами:

$$J_{x_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_i} + a_i^2 F_i),$$

$$J_{y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{y_i} + b_i^2 F_i),$$

$$a_1 = 0 \text{ см},$$

$$b_1 = x_1 - x_c = 0 - 9,48 = -9,48 \text{ см},$$

$$a_2 = a_3 = B_2 - x_{02} = 10 - 2,43 = 7,57 \text{ см},$$

$$b_2 = b_3 = x_2 - x_c = 12,67 - 9,48 = 3,19 \text{ см},$$

$$J_{x_c} = 1520 + 2 \cdot (272 + 7,57^2 \cdot 34,7) = 6041 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_c} = 113 + 9,48^2 \cdot 23,4 + 2 \cdot (897 + 3,19^2 \cdot 34,7) = 4716 \text{ см}^4.$$

3 Розглянемо переріз 6 ($M_{x6} = 36 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_{y6} = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}$).

3.1 Визначаємо положення нейтральної лінії в перерізі 6, обчислюючи кутовий коефіцієнт за формулою (1.2):

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{J_{x_c}}{J_{y_c}} \frac{M_{y6}}{M_{x6}} \right| = \left| \frac{6041}{4716} \cdot \frac{50}{36} \right| = 1,779.$$

Отже, $\beta = 60,7^\circ$.

3.2 Установлюємо знаки напружень від кожного згинального моменту (див. рис. 1.14).

У розглянутому перерізі нейтральна лінія пройде через II та IV квадранти (I квадрант утворений додатнім напрямком координатних осей).

3.3 Визначаємо максимальні нормальні напруження для розглянутого перерізу.

Великі напруження виникають у найбільш віддалених від нейтральної лінії точках. Для розглянутого перерізу такими точками є точки 1 та 2 (див. рис. 1.14).

Визначаємо напруження в цих точках за формулою

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} y_A + \frac{M_y}{J_y} x_A.$$

Якщо в точці 1 діють найбільші напруження, які розтягують, то напруження в точці 1 визначається за формулою

$$\sigma_1 = \frac{M_{x6}}{J_{x_c}} y_1 + \frac{M_{y6}}{J_{y_c}} x_1,$$

де $x_1 = z_0 + H_2 - x_c = 2,07 + 16 - 9,48 = 8,59$ см; $y_1 = B_2 = 10$ см;

$$\sigma_1 = \frac{36 \times 10^{-3}}{6041 \times 10^{-8}} \cdot 10 \times 10^{-2} + \frac{50 \times 10^{-3}}{4716 \times 10^{-8}} \cdot 8,59 \times 10^{-2} = 150,7 \text{ МПа}.$$

Якщо в точці 2 діють найбільші стискаючі напруження, то напруження в точці 2 визначається за формулою

$$\sigma_2 = -\frac{M_{x6}}{J_{x_c}} y_2 - \frac{M_{y6}}{J_{y_c}} x_2,$$

де $x_2 = B_1 - z_0 + x_c = 7,6 - 2,07 + 9,48 = 15,01$ см; $y_2 = \frac{H_1}{2} = \frac{20}{2} = 10$ см;

$$\sigma_2 = -\frac{36 \times 10^{-3}}{6041 \times 10^{-8}} \cdot 10 \times 10^{-2} - \frac{50 \times 10^{-3}}{4716 \times 10^{-8}} \cdot 15,01 \times 10^{-2} = -218,7 \text{ МПа}.$$

3.4 Будуємо епюру нормальних напружень (див. рис. 1.14).

Задача 1.5

Визначити максимальні нормальні напруження для балки, яка подані на рисунку 1.15, а. Переріз балки наведений на рисунку 1.15, б.

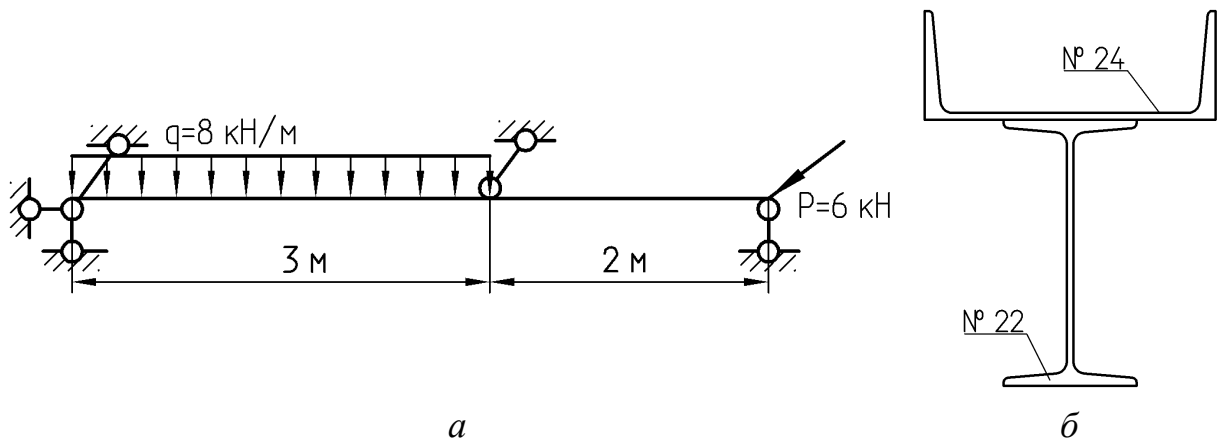


Рисунок 1.15

Розв'язання

1 Балка працює на складне згинання (рис. 1.16, а). Розкладаємо навантаження на вертикальну та горизонтальну складові.

Розглянемо навантаження, що діє у вертикальній площині (рис. 1.16, б). У вертикальній площині діє розподілене навантаження q .

Визначаємо опорні реакції у вертикальній площині, дорівнюючи нулю суми моментів усіх зовнішніх сил відносно точок А і С (див. рис. 1.16, б):

$$\sum M_A = 0,$$

$$-q \cdot 3 \cdot 1,5 + R_C^y \cdot 5 = 0,$$

$$R_C^y = \frac{q \cdot 3 \cdot 1,5}{5} = \frac{8 \cdot 3 \cdot 1,5}{5} = 7,2 \text{ кН}.$$

$$\sum M_C = 0,$$

$$q \cdot 3 \cdot 3,5 - R_A^y \cdot 5 = 0,$$

$$R_A^y = \frac{q \cdot 3 \cdot 3,5}{5} = \frac{8 \cdot 3 \cdot 3,5}{5} = 16,8 \text{ кН}.$$

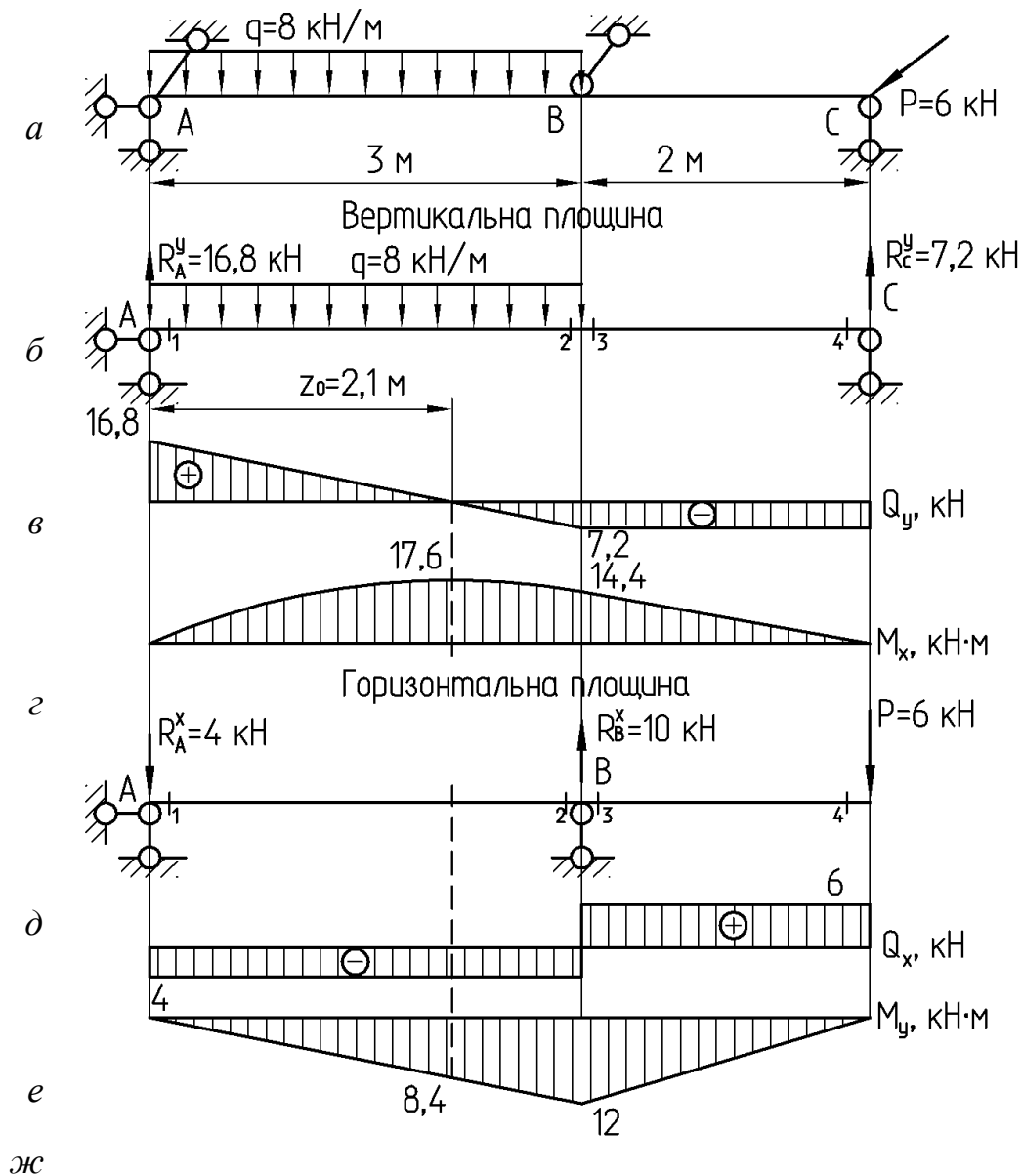


Рисунок 1.16

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$-q \cdot 3 + R_A^y + R_C^y = 0,$$

$$-8 \cdot 3 + 16,8 + 7,2 = 0,$$

$$-24 + 24 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Обчислюємо значення поперечних сил і згинальних моментів у характерних перерізах:

$$Q_{y1} = R_A^y = 16,8 \text{ кН},$$

$$Q_{y2} = R_A^y - q \cdot 3 = 16,8 - 8 \cdot 3 = -7,2 \text{ кН},$$

$$Q_{y4} = Q_{y3} = -R_C^y = -7,2 \text{ кН},$$

$$M_{x1} = M_{x4} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{x2} = M_{x3} = R_C^y \cdot 2 = 7,2 \cdot 2 = 14,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюри за характерними перерізами (рис. 1.16, в, г).

Якщо епюра поперечних сил пересікає базову лінію та змінює знак з «+» на «-», то в цій точці маємо максимальне значення згинального моменту. Знаходимо положення цього перерізу:

$$z_0 = \frac{16,8}{8} = 2,1 \text{ м},$$

$$M_{x5} = R_A^y z_0 - q z_0 \frac{z_0}{2} = 16,8 \cdot 2,1 - 8 \cdot 2,1 \cdot \frac{2,1}{2} = 17,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Розглянемо навантаження, що діє в горизонтальній площині (рис. 1.16, д). У горизонтальній площині діє зосереджена сила Р:

$$\sum M_A = 0,$$

$$-P \cdot 5 + R_B^x \cdot 3 = 0,$$

$$R_B^x = \frac{P \cdot 5}{3} = \frac{6 \cdot 5}{3} = 10 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$-P \cdot 2 + R_A^x \cdot 3 = 0,$$

$$R_A^x = \frac{P \cdot 2}{3} = \frac{6 \cdot 2}{3} = 4 \text{ кН}.$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_x = 0$:

$$-P - R_A^x + R_B^x = 0,$$

$$-6 - 4 + 10 = 0,$$

$$-10 + 10 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Обчислюємо значення поперечних сил і згинальних моментів у характерних перерізах :

$$Q_{x1} = Q_{x2} = -R_A^x = -4 \text{ кН},$$

$$Q_{x3} = Q_{x4} = P = 6 \text{ кН},$$

$$M_{y1} = M_{y4} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{y2} = M_{y3} = -R_A^x \cdot 3 = -4 \cdot 3 = -12 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{y5} = -R_A^x z_0 = -4 \cdot 2,1 = -8,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюри за характерними перерізами (рис. 1.16, е, ж).

Аналізуючи епюри згинальних моментів у вертикальній і горизонтальній площинах, визначаємо небезпечні перерізи. Для розглянутої балки із заданим навантаженням небезпечними перерізами є два перерізи:

– переріз 3 ($M_{x3} = 14,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_{y3} = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$);

– переріз 5 ($M_{x5} = 17,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_{y5} = 8,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$).

У даних перерізах в одній із площин діє максимальний згинальний момент.

Для того щоб визначити, який переріз є найнебезпечнішим, необхідно визначити максимальні напруження в кожному із цих перерізів.

2 Визначаємо геометричні характеристики перерізу (рис. 1.17).

Із сортаменту (додаток А) виписуємо геометричні характеристики двотавра № 22:

$$\begin{aligned} H_1 &= 22 \text{ см}, & F_1 &= 30,6 \text{ см}^2, \\ B_1 &= 11 \text{ см}, & J_{x1} &= 2550 \text{ см}^4, \\ & & J_{y1} &= 157 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Із сортаменту виписуємо геометричні характеристики швелера № 24:

$$\begin{aligned} H_2 &= 24 \text{ см}, & F_2 &= 30,6 \text{ см}^2, \\ B_2 &= 9 \text{ см}, & J_{x2} &= 208 \text{ см}^4, \\ z_0 &= 2,42 \text{ см}, & J_{y2} &= 2900 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Визначаємо положення центра ваги всього перерізу. Якщо переріз симетричний відносно осі Y, то центр ваги лежить на ній. Визначаємо координату центра ваги складної фігури відносно початкової системи осей за формулою

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}.$$

Знаходимо координати центра ваги i -ї фігури відносно початкової системи осей:

$$y_1 = 0 \text{ см}, \quad y_2 = \frac{H_1}{2} + z_0 = \frac{22}{2} + 2,42 = 13,42 \text{ см}.$$

Отже,

$$y_c = \frac{13,42 \cdot 30,6}{30,6 + 30,6} = 6,71 \text{ см}.$$

За знайденою координатою y_c наносимо положення центра ваги складної фігури (див. рис. 1.17).

Визначаємо осьові моменти інерції всього перерізу відносно головних центральних осей фігури за формулами:

$$J_{x_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_i} + a_i^2 F_i),$$

$$J_{y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{y_i} + b_i^2 F_i),$$

$$a_1 = y_1 - y_c = 0 - 6,71 = -6,71 \text{ см},$$

$$b_1 = b_2 = 0 \text{ см},$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 13,42 - 6,71 = 6,71 \text{ см},$$

$$J_{x_c} = 2550 + 6,71^2 \cdot 30,6 + 208 + 6,71^2 \cdot 30,6 = 5513 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_c} = 157 + 2900 = 3057 \text{ см}^4.$$

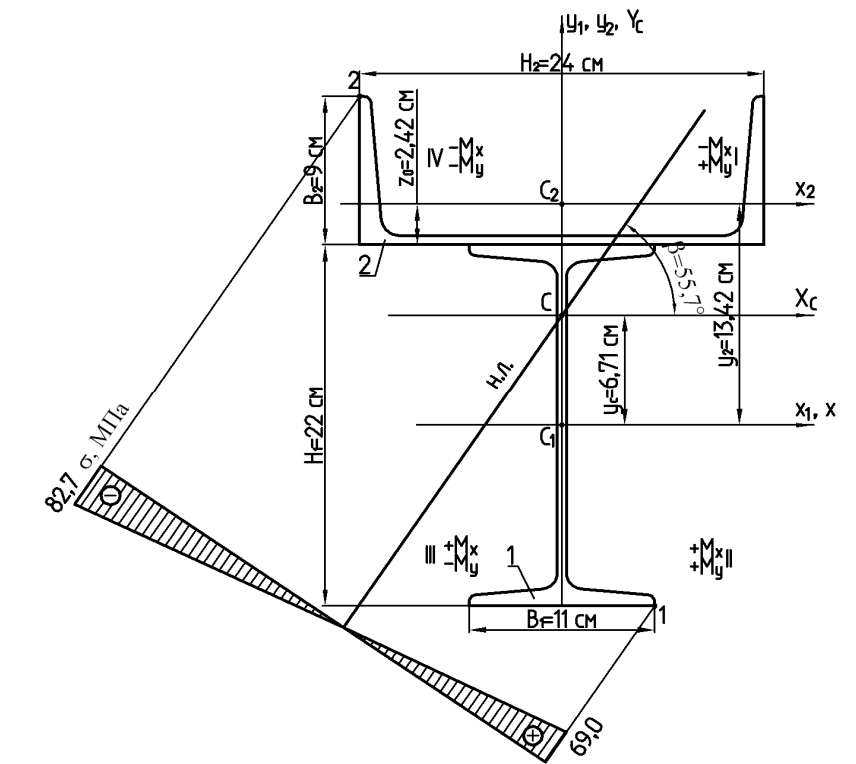
3 Розглянемо переріз 3 ($M_{x3} = 14,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_{y3} = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$).

3.1 Визначаємо положення нейтральної лінії в перерізі 3, обчислюючи кутовий коефіцієнт за формулою (1.2):

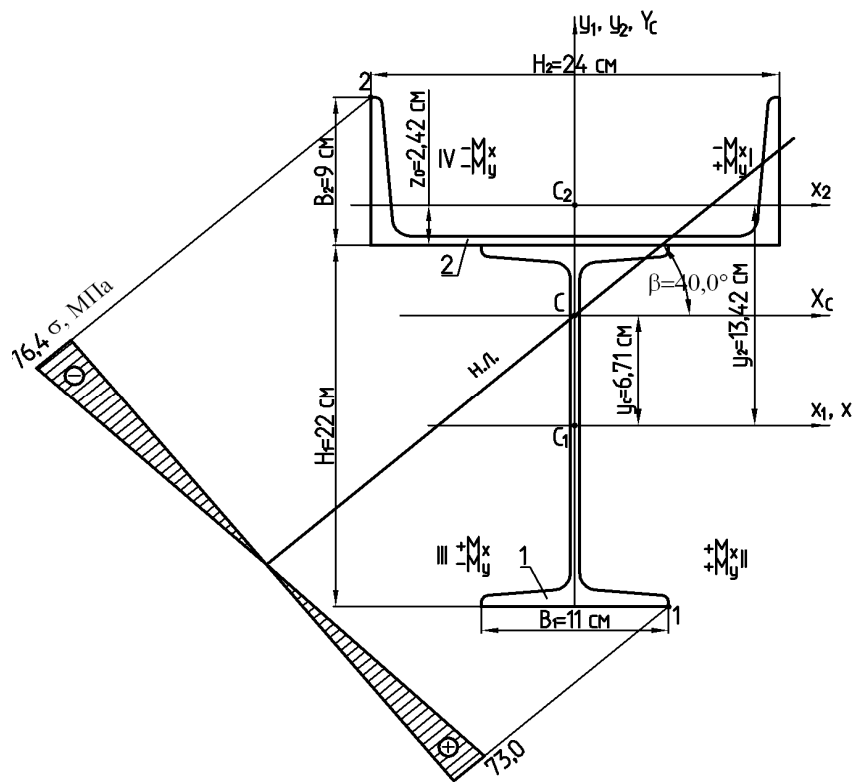
$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{J_{x_c}}{J_{y_c}} \frac{M_{y3}}{M_{x3}} \right| = \left| \frac{5513}{3057} \cdot \frac{12}{14,4} \right| = 1,503.$$

Отже, $\beta = 56,4^\circ$.

3.2 Встановлюємо знаки напружень від кожного згинального моменту (рис. 1.17, а).



a



b

a – $M_{x3} = 14,4$ кН·м, $M_{y3} = 12$ кН·м,

b – $M_{x5} = 17,6$ кН·м, $M_{y5} = 8,4$ кН·м

Рисунок 1.17

У розглянутому перерізі нейтральна лінія пройде через I та III квадранти (I квадрант утворений додатнім напрямком координатних осей).

3.3 Визначаємо максимальні нормальні напруження для розглянутого перерізу.

Великі напруження виникають у найбільш віддалених від нейтральної лінії точках. Для розглянутого перерізу такими точками є точки 1 та 2 (див. рис. 1.17, а).

Визначаємо напруження в цих точках за формулою

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x.$$

Якщо в точці 1 діють найбільші напруження, які розтягують, то напруження в точці 1 визначається за формулою

$$\sigma_1 = \frac{M_{x3}}{J_{xc}} y_1 + \frac{M_{y3}}{J_{yc}} x_1,$$

$$\text{де } x_1 = \frac{B_1}{2} = \frac{11}{2} = 5,5 \text{ см}, \quad y_1 = \frac{H_1}{2} + y_c = \frac{22}{2} + 6,71 = 17,71 \text{ см},$$

$$\sigma_1 = \frac{14,4 \times 10^{-3}}{5513 \times 10^{-8}} \cdot 17,71 \times 10^{-2} + \frac{12 \times 10^{-3}}{3057 \times 10^{-8}} \cdot 5,5 \times 10^{-2} = 67,8 \text{ МПа}.$$

Якщо в точці 2 діють найбільші стискаючі напруження, то напруження в точці 2 визначається за формулою

$$\sigma_2 = -\frac{M_{x3}}{J_{xc}} y_2 - \frac{M_{y3}}{J_{yc}} x_2,$$

$$\text{де } x_2 = \frac{H_2}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ см}, \quad y_2 = \frac{H_1}{2} + B_2 - y_c = \frac{22}{2} + 9 - 6,71 = 13,29 \text{ см},$$

$$\sigma_1 = -\frac{14,4 \times 10^{-3}}{5513 \times 10^{-8}} \cdot 13,29 \times 10^{-2} - \frac{12 \times 10^{-3}}{3057 \times 10^{-8}} \cdot 12 \times 10^{-2} = -81,8 \text{ МПа}.$$

3.4 Будуємо епюру нормальних напружень (див. рис. 1.17, а).

4 Розглянемо переріз 5 ($M_{x5} = 17,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_{y5} = 8,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$).

4.1 Визначаємо положення нейтральної лінії в перерізі 5, обчислюючи кутовий коефіцієнт за формулою (1.2):

$$\operatorname{tg}\beta = \left| \frac{J_{x_c}}{J_{y_c}} \frac{M_{y5}}{M_{x5}} \right| = \left| \frac{5513}{3057} \cdot \frac{8,4}{17,6} \right| = 0,861.$$

Отже, $\beta = 40,7^\circ$.

4.2 Встановлюємо знаки напружень від кожного згинального моменту (рис. 1.17, б).

У розглянутому перерізі нейтральна лінія пройде через I та III квадранти (I квадрант утворений додатнім напрямком координатних осей).

4.3 Визначаємо максимальні нормальні напруження для розглянутого перерізу.

Найбільш віддаленими від нейтральної лінії точками є точки 1 та 2 (див. п. 3.3).

Отже,

$$\sigma_1 = \frac{17,6 \times 10^{-3}}{5513 \times 10^{-8}} \cdot 17,71 \times 10^{-2} + \frac{8,4 \times 10^{-3}}{3057 \times 10^{-8}} \cdot 5,5 \times 10^{-2} = 71,7 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = -\frac{17,6 \times 10^{-3}}{5513 \times 10^{-8}} \cdot 13,29 \times 10^{-2} - \frac{8,4 \times 10^{-3}}{3057 \times 10^{-8}} \cdot 12 \times 10^{-2} = -75,4 \text{ МПа}.$$

4.4 Будуємо епюру нормальних напружень (див. рис. 1.17, б).

5 Аналізуючи отримані епюри нормальних напружень, робимо висновки про те, що небезпечним перерізом є переріз 3, у якому діють згинальні моменти $M_{x3} = 14,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$ та $M_{y3} = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$ і виникають максимальні нормальні напруження $\sigma_{\max} = 82,7 \text{ МПа}$.

1.2 Згинання з крученням

При дії згинання та кручення в поперечних перерізах вала виникає п'ять внутрішніх силових факторів: крутний момент $M_{\text{кр}}$, згинальні моменти M_x та M_y , поперечні сили Q_x та Q_y .

Для розрахунку вала в першу чергу мають бути побудовані епюри згинальних моментів M_x , M_y і крутного $M_{\text{кр}}$ (як правило, напруження від подовжніх і поперечних сил незначні, тому ними нехтуємо). Для цього навантаження сили розкладаємо на складові уздовж координатних осей, а потім будуємо епюри:

– згинальних моментів відносно вертикальної осі (M_y) від горизонтальних проекцій $P_{1x}, P_{2x}, \dots, P_{nx}$;

- згинальних моментів відносно горизонтальної осі (M_x) від вертикальних проекцій $P_{1_y}, P_{2_y}, \dots, P_{n_y}$;
- крутних моментів ($M_{кр}$).

Маючи епюри згинальних моментів M_x та M_y , можемо для кожного перерізу вала знайти повний згинальний момент $M_{зг}$ як геометричну суму обох складових:

$$M_{зг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}. \quad (1.8)$$

Будуємо сумарну епюру $M_{зг}$. Величини згинального моменту $M_{зг}$ обчислюють тільки для перерізів, у яких на епюрах M_x та M_y є злами. Ці величини відкладають по один бік та з'єднують увігнутою параболою.

Відшукуємо небезпечні перерізи, що сполучають відносний екстремум $M_{зг}$ та $M_{кр}$.

Умова міцності при згинанні із крученням має вигляд

$$\sigma = \frac{M_{пр}}{W_o} \leq [\sigma], \quad (1.9)$$

де W_o – осьовий момент опору;

$M_{пр}$ – приведений момент, еквівалентний трьом моментам: M_x , M_y і $M_{кр}$.

$$W_o = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3. \quad (1.10)$$

$$M_{пр}^{III} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{кр}^2}, \quad (1.11)$$

$$M_{пр}^{IV} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0.75M_{кр}^2}. \quad (1.12)$$

При крученні зі згинанням виникають і нормальні, і дотичні напруження:

$$\sigma = \frac{M_{изг}}{W_o}, \quad (1.13)$$

$$\tau = \frac{M_{кр}}{W_\rho}, \quad (1.14)$$

де W_ρ – полярний момент опору,

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} = 2W_o. \quad (1.15)$$

У загальному випадку навантаження бруса в його поперечних перерізах виникають усі шість силових факторів. У переважній більшості практичних розрахунків вплив поперечних сил не враховують і розрахунок на міцність роблять за чотирма внутрішніми силовими факторами: N , M_x , M_y , $M_{кр}$, тобто на комбінації розтягання (стискання), просторового згинання та кручення.

У цьому випадку нормальні та дотичні напруження обчислюють за формулами:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_{зг}}{W_o}, \quad (1.16)$$

$$\tau = \frac{M_{кр}}{W_p}. \quad (1.17)$$

Для перевірки міцності вала ми повинні визначити еквівалентні (приведені) напруження за відповідною теорією міцності та зрівняти їх з допустимими напруженнями. У зв'язку з тим, що вали звичайно виготовляються із пластичних матеріалів, можна використати третю та четверту теорії міцності:

$$\sigma_{екв}^{III} = \sqrt{\sigma_{зг}^2 + 4\tau_{кр}^2} \leq [\sigma]; \quad (1.18)$$

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\sigma_{зг}^2 + 3\tau_{кр}^2} \leq [\sigma]. \quad (1.19)$$

Задача 1.6

На вал насаджені два зубчасті колеса (рис. 1.18). Діаметр першого колеса $D_1 = 0,6$ м, діаметр другого колеса $D_2 = 0,4$ м. Колова сила $P_1 = 5,00$ кН. Визначити діаметр проміжного вала редуктора за третьою теорією міцності, якщо допустиме напруження $[\sigma] = 80$ МПа. При обчисленнях прийняти, що радіальна сила $T_i = 0,32P_i$.

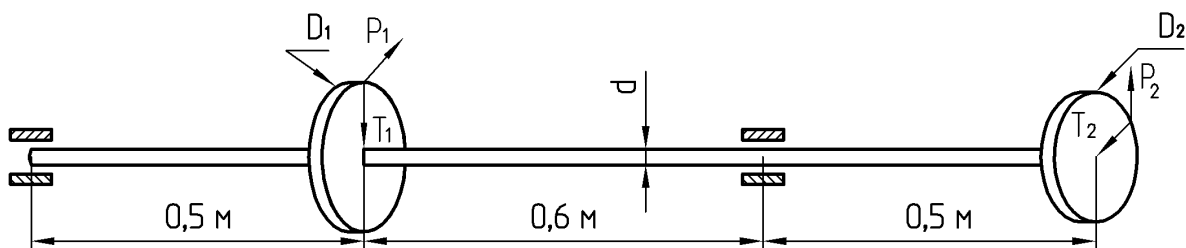


Рисунок 1.18

Розв'язання

1 Обчислюємо крутний момент, що передається валом, за формулою

$$M_{\text{кр}} = P_i \frac{D_i}{2},$$

$$M_{\text{кр}} = P_1 \frac{D_1}{2} = 5,00 \cdot \frac{0,6}{2} = 1,50 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2 За знайденим крутним моментом знаходимо сили в зачепленні (рис. 1.19, а):

$$P_i = \frac{2M_{\text{кр}}}{D_i},$$

$$P_2 = \frac{2M_{\text{кр}}}{D_2} = \frac{2 \cdot 1,50}{0,4} = 7,50 \text{ кН},$$

а потім радіальні сили $T_i = 0,32P_i$:

$$T_1 = 0,32P_1 = 0,32 \cdot 5,0 = 1,60 \text{ кН},$$

$$T_2 = 0,32P_2 = 0,32 \cdot 7,50 = 2,40 \text{ кН}.$$

3 Приводимо всі сили до центра ваги перерізу вала (рис. 1.19, б). У вертикальній площині на вал діють радіальна сила $T_1 = 1,60 \text{ кН}$ та колова сила $P_2 = 7,50 \text{ кН}$; у горизонтальній площині на вал діють колова сила $P_1 = 5,00 \text{ кН}$ та радіальна сила $T_2 = 2,40 \text{ кН}$. Якщо сили P_1 та P_2 не пересікають вісь вала, то вони створюють крутний момент $M_{\text{кр}} = 1,50 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Аналіз схеми навантаження вала зосередженими силами та крутними моментами (див. рис. 1.19, б) показує, що вал працює на згинання у вертикальній площині, згинання у горизонтальній площині та кручення. Розглянемо кожну деформацію окремо, користуючись принципом незалежності дії сил.

4 Розглянемо згинання у вертикальній площині. Вал навантажений радіальною $T_1 = 1,60 \text{ кН}$ та коловою $P_2 = 7,50 \text{ кН}$ силами (рис. 1.19, в).

Визначаємо опорні реакції у вертикальній площині, прирівнюючи нулю суми моментів всіх зовнішніх сил відносно точок А та В (див. рис. 1.19, в):

$$\sum M_A = 0,$$

$$-T_1 \cdot 0,5 + P_2 \cdot 1,6 + R_B^y \cdot 1,1 = 0,$$

$$R_B^y = \frac{T_1 \cdot 0,5 - P_2 \cdot 1,6}{1,1} = \frac{1,60 \cdot 0,5 - 7,50 \cdot 1,6}{1,1} = -10,18 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$T_1 \cdot 0,6 + P_2 \cdot 0,5 - R_A^y \cdot 1,1 = 0,$$

$$R_A^y = \frac{T_1 \cdot 0,6 + P_2 \cdot 0,5}{1,1} = \frac{1,60 \cdot 0,6 + 7,50 \cdot 0,5}{1,1} = 4,28 \text{ кН}.$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$-T_1 + P_2 + R_A^y + R_B^y = 0,$$

$$-1,60 + 7,50 + 4,28 - 10,18 = 0,$$

$$-11,78 + 11,78 = 0,$$

$$0 = 0.$$

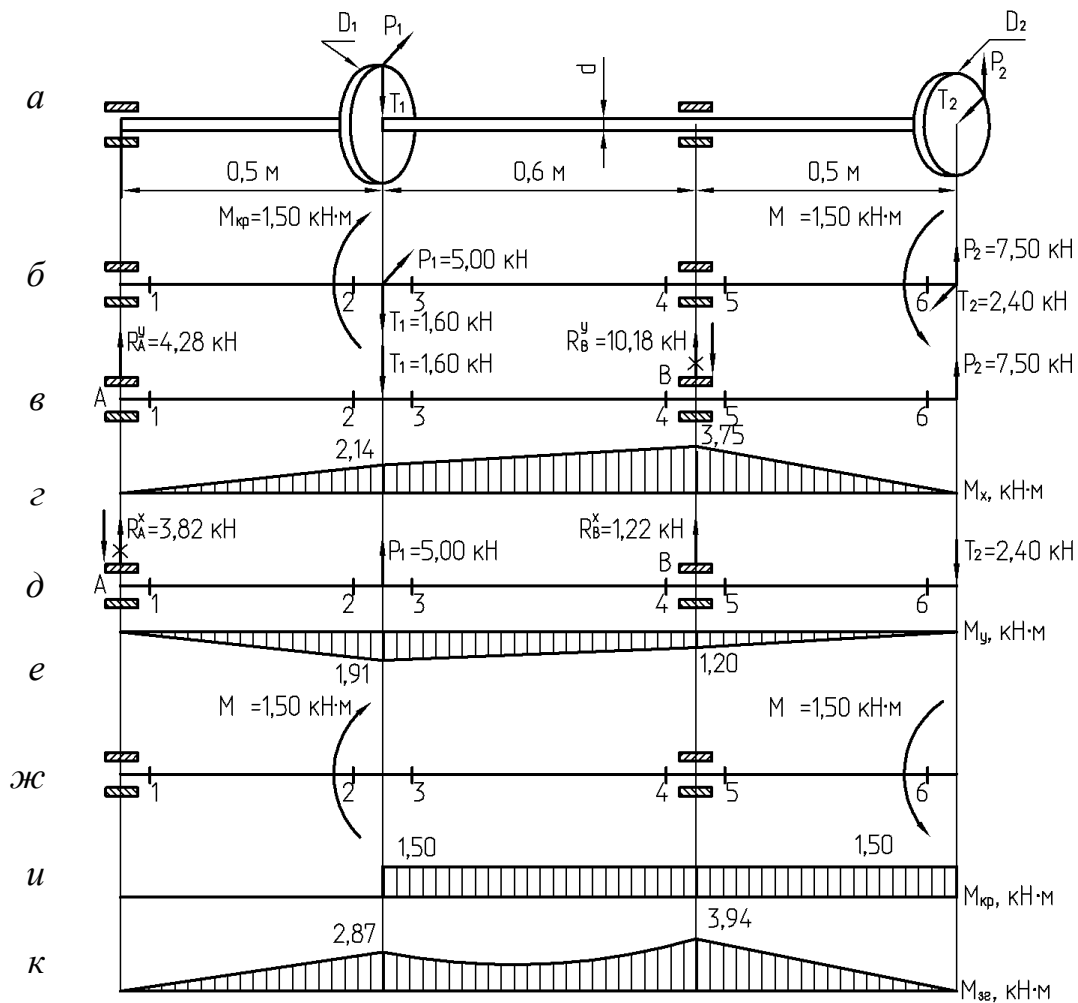


Рисунок 1.19

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах, що виникають у вертикальній площині:

$$M_{x1} = M_{x6} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{x2} = M_{x3} = R_A^y \cdot 0,5 = 4,28 \cdot 0,5 = 2,14 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{x4} = M_{x5} = P_2 \cdot 0,5 = 7,50 \cdot 0,5 = 3,75 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів у вертикальній площині M_x за характерними перерізами (рис. 1.19, г).

5 Розглянемо згинання у горизонтальній площині. Вал навантажений коловою $P_1 = 5,00 \text{ кН}$ та радіальною $T_2 = 2,40 \text{ кН}$ силами (рис. 1.19, д).

Визначаємо опорні реакції в горизонтальній площині, дорівнюючи нулю суми моментів усіх зовнішніх сил відносно точок А та В (див. рис. 1.19, д):

$$\sum M_A = 0,$$

$$P_1 \cdot 0,5 - T_2 \cdot 1,6 + R_B^x \cdot 1,1 = 0,$$

$$R_B^x = \frac{-P_1 \cdot 0,5 + T_2 \cdot 1,6}{1,1} = \frac{-5,00 \cdot 0,5 + 2,40 \cdot 1,6}{1,1} = 1,22 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$-P_1 \cdot 0,6 - T_2 \cdot 0,5 - R_A^x \cdot 1,1 = 0,$$

$$R_A^x = \frac{-P_1 \cdot 0,6 - T_2 \cdot 0,5}{1,1} = \frac{-5,00 \cdot 0,6 - 2,40 \cdot 0,5}{1,1} = -3,82 \text{ кН}.$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_x = 0$:

$$P_1 - T_2 + R_A^x + R_B^x = 0,$$

$$5,00 - 2,40 - 3,82 + 1,22 = 0,$$

$$-6,22 + 6,22 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах, що виникають у горизонтальній площині:

$$M_{y1} = M_{y6} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{y2} = M_{y3} = -R_A^x \cdot 0,5 = -3,82 \cdot 0,5 = -1,91 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{y4} = M_{y5} = -T_2 \cdot 0,5 = -2,40 \cdot 0,5 = -1,20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів у горизонтальній площині M_y за характерними перерізами (рис. 1.19, е).

6 Вал навантажений двома зосередженими моментами $M_{кр} = 1,50 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (рис. 1.19, ж), які визивають кручення вала на ділянці від перерізу 3 до перерізу 6. Будуємо епюру крутних моментів $M_{кр}$ (рис. 1.19, и).

7 Для кожного перерізу вала знаходимо повний згинальний момент $M_{зг}$ як геометричну суму обох складових:

$$M_{зг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2},$$

$$M_{зг1} = M_{зг6} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{зг2} = M_{зг3} = \sqrt{2,14^2 + 1,91^2} = 2,87 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{зг4} = M_{зг5} = \sqrt{3,75^2 + 1,20^2} = 3,94 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюру повних згинальних моментів $M_{зг}$ (рис. 1.19, к).

8 Визначаємо небезпечний переріз і діаметр вала.

Аналіз епюри повних згинальних моментів $M_{зг}$ та епюри крутних моментів $M_{кр}$ показує, що небезпечними перерізами є перерізи 4 та 5. Для цих перерізів визначаємо розрахунковий момент за третьою теорією міцності:

$$M_{пр}^{III} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{кр}^2} = \sqrt{3,75^2 + 1,20^2 + 1,50^2} = 4,21 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Основна умова міцності

$$\sigma = \frac{M_{пр}}{W_0} \leq [\sigma].$$

Необхідний момент опору поперечного перерізу

$$W_0 \geq \frac{M_{пр}}{[\sigma]} = \frac{4,21 \times 10^{-3}}{80} \times 10^6 = 52,7 \text{ см}^3.$$

Якщо для круга

$$W_0 = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3,$$

то діаметр дорівнює:

$$d = \sqrt[3]{\frac{W_0}{0,1}} = \sqrt[3]{\frac{52,7}{0,1}} = 8,1 \text{ см.}$$

Приймаємо діаметр, кратний 5 мм, тобто $d = 85 \text{ мм} = 8,5 \text{ см.}$

Задача 1.7

На проміжний вал редуктора насаджені два зубчасті колеса (рис. 1.20). Діаметр першого колеса $D_1 = 0,5 \text{ м}$, діаметр другого колеса $D_2 = 0,3 \text{ м}$. Передана потужність $K = 50 \text{ кВт}$, кутова швидкість $n = 200 \text{ об/хв}$. Визначити діаметр вала, використовуючи третю теорію міцності, якщо допустиме напруження $[\sigma] = 80 \text{ МПа}$. При обчисленнях прийняти, що радіальна сила $T_i = 0,32P_i$.

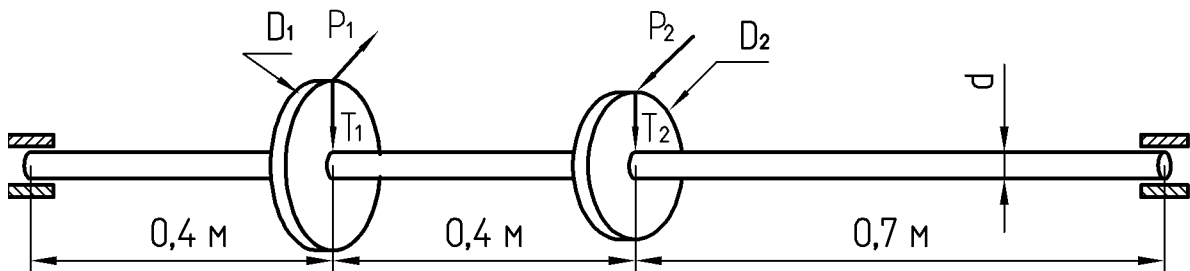


Рисунок 1.20

Розв'язання

1 Обчислюємо крутний момент, що передається валом, за формулою

$$M_{кр} = \frac{30K}{\pi n} \approx 9,55 \frac{K}{n},$$
$$M_{кр} = 9,55 \frac{50}{200} = 2,39 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

2 За знайденим крутним моментом знаходимо сили в зачепленні (рис. 1.21, а):

$$P_i = \frac{2M_{кр}}{D_i},$$

$$P_1 = \frac{2M_{кр}}{D_1} = \frac{2 \cdot 2,39}{0,5} = 9,56 \text{ кН},$$

$$P_2 = \frac{2M_{кр}}{D_2} = \frac{2 \cdot 2,39}{0,3} = 15,93 \text{ кН},$$

а потім радіальні сили $T_i = 0,32P_i$:

$$T_1 = 0,32P_1 = 0,32 \cdot 9,56 = 3,06 \text{ кН},$$

$$T_2 = 0,32P_2 = 0,32 \cdot 15,93 = 5,10 \text{ кН}.$$

3 Приводимо всі сили до центра ваги перерізу вала (рис. 1.21, б). У вертикальній площині на вал діють радіальні сили $T_1 = 3,06 \text{ кН}$ та $T_2 = 5,10 \text{ кН}$; у горизонтальній площині на вал діють колові сили $P_1 = 9,56 \text{ кН}$ та $P_2 = 15,93 \text{ кН}$. Якщо сили P_1 та P_2 не пересікають вісь вала, то вони створюють крутний момент $M_{кр} = 2,39 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Аналіз схеми навантаження вала зосередженими силами та крутними моментами (див. рис. 1.21, б) показує, що вал працює на згинання у вертикальній площині, згинання у горизонтальній площині та кручення. Розглянемо кожну деформацію окремо, користуючись принципом незалежності дії сил.

4 Розглянемо згинання у вертикальній площині. Вал навантажений радіальними силами $T_1 = 3,06 \text{ кН}$ та $T_2 = 5,10 \text{ кН}$ (рис. 1.21, в).

Визначаємо опорні реакції у вертикальній площині, дорівнюючи нулю суми моментів всіх зовнішніх сил відносно точок А та В (див. рис. 1.21, в):

$$\sum M_A = 0,$$

$$-T_1 \cdot 0,4 - T_2 \cdot 0,8 + R_B^y \cdot 1,5 = 0,$$

$$R_B^y = \frac{T_1 \cdot 0,4 + T_2 \cdot 0,8}{1,5} = \frac{3,06 \cdot 0,4 + 5,10 \cdot 0,8}{1,5} = 3,54 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$T_1 \cdot 1,1 + P_2 \cdot 0,7 - R_A^y \cdot 1,5 = 0,$$

$$R_A^y = \frac{T_1 \cdot 1,1 + P_2 \cdot 0,7}{1,5} = \frac{3,06 \cdot 1,1 + 5,10 \cdot 0,7}{1,5} = 4,62 \text{ кН}.$$

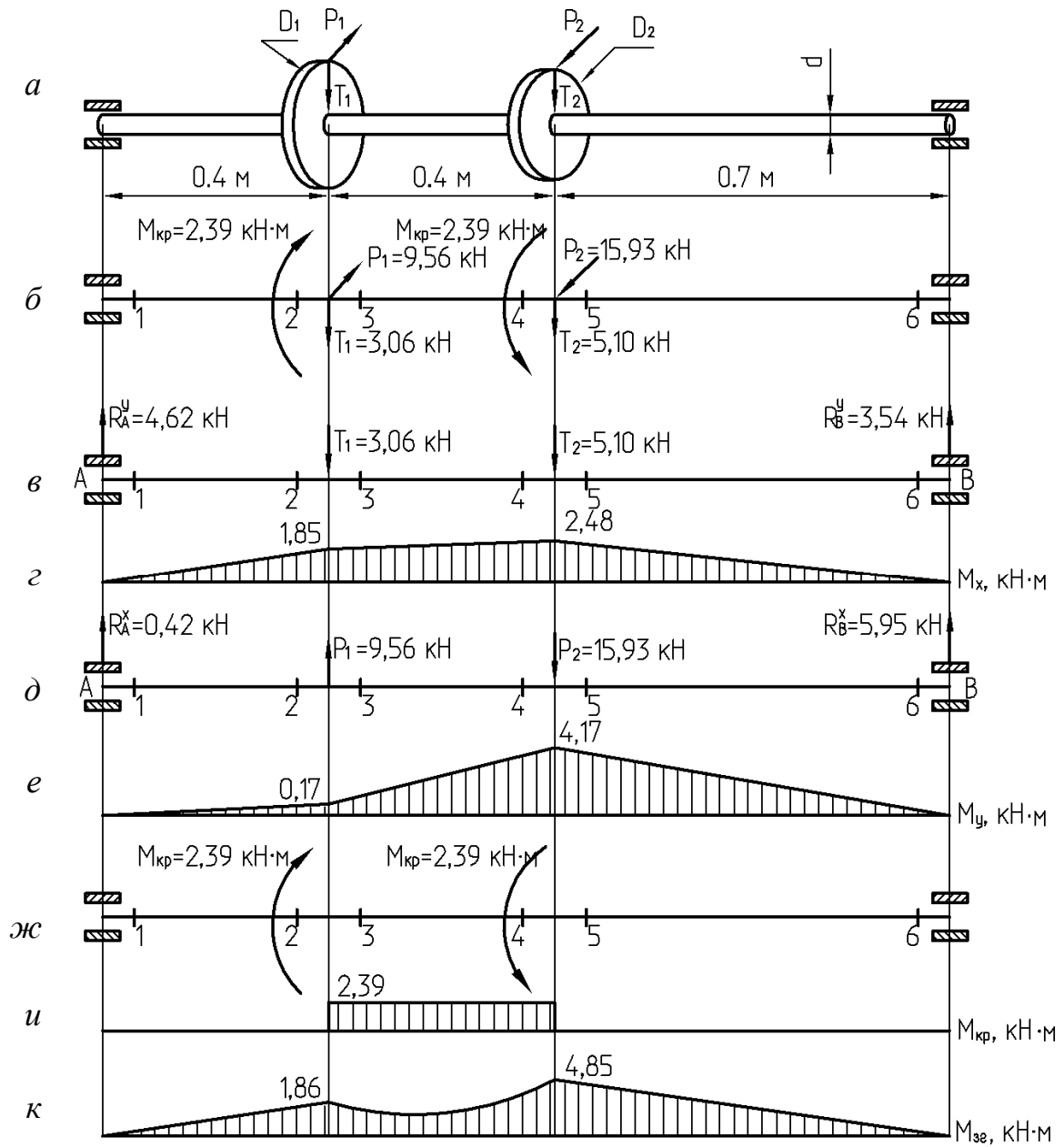


Рисунок 1.21

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$-T_1 - T_2 + R_A^y + R_B^y = 0,$$

$$-3,06 - 5,10 + 4,62 + 3,54 = 0,$$

$$-8,16 + 8,16 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів, у характерних перерізах, що виникають у вертикальній площині:

$$M_{x1} = M_{x6} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{x2} = M_{x3} = R_A^y \cdot 0,4 = 4,62 \cdot 0,4 = 1,85 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{x4} = M_{x5} = R_B^y \cdot 0,7 = 3,54 \cdot 0,7 = 2,48 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів у вертикальній площині M_x за характерними перерізами (рис. 1.21, г).

5 Розглянемо згинання у горизонтальній площині. Вал навантажений коловими силами $P_1 = 9,56 \text{ кН}$ та $P_2 = 15,93 \text{ кН}$ (рис. 1.21, д).

Визначаємо опорні реакції в горизонтальній площині, дорівнюючи нулю суми моментів усіх зовнішніх сил відносно точок А та В (див. рис. 1.21, д):

$$\sum M_A = 0,$$

$$P_1 \cdot 0,4 - P_2 \cdot 0,8 + R_B^x \cdot 1,5 = 0,$$

$$R_B^x = \frac{-P_1 \cdot 0,4 + P_2 \cdot 0,8}{1,5} = \frac{-9,56 \cdot 0,4 + 15,93 \cdot 0,8}{1,5} = 5,95 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$-P_1 \cdot 1,1 + P_2 \cdot 0,7 - R_A^x \cdot 1,5 = 0,$$

$$R_A^x = \frac{-P_1 \cdot 1,1 + P_2 \cdot 0,7}{1,5} = \frac{-9,56 \cdot 1,1 + 15,93 \cdot 0,7}{1,5} = 0,42 \text{ кН}.$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_x = 0$:

$$P_1 - P_2 + R_A^x + R_B^x = 0,$$

$$9,56 - 15,93 + 0,42 + 5,95 = 0,$$

$$15,93 - 15,93 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах, що виникають у горизонтальній площині:

$$M_{y1} = M_{y6} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{y2} = M_{y3} = R_A^x \cdot 0,4 = 0,42 \cdot 0,4 = 0,17 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{y4} = M_{y5} = R_B^x \cdot 0,7 = 5,95 \cdot 0,7 = 4,17 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів у горизонтальній площині M_y за характерними перерізами (рис. 1.21, е).

6 Вал навантажений двома зосередженими моментами $M_{кр} = 2,39 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (рис. 1.21, ж), які визивають кручення вала на ділянці від перерізу 3 до перерізу 4. Будуємо епюру крутних моментів $M_{кр}$ (рис. 1.21, и).

7 Для кожного перерізу вала знаходимо повний згинальний момент $M_{зг}$ як геометричну суму обох складових:

$$M_{зг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2},$$

$$M_{зг1} = M_{зг6} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{зг2} = M_{зг3} = \sqrt{1,85^2 + 0,17^2} = 1,86 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{зг4} = M_{зг5} = \sqrt{2,48^2 + 4,17^2} = 4,85 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюру повних згинальних моментів $M_{зг}$ (рис. 1.21, к).

8 Визначаємо небезпечний переріз і діаметр вала.

Аналіз епюри повних згинальних моментів $M_{зг}$ і епюри крутних моментів $M_{кр}$ показує, що небезпечним перерізом є переріз 4. Для цього перерізу визначаємо розрахунковий момент за третьою теорією міцності:

$$M_{пр}^{III} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{кр}^2} = \sqrt{2,48^2 + 4,17^2 + 2,39^2} = 5,41 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Основна умова міцності

$$\sigma = \frac{M_{пр}}{W_o} \leq [\sigma].$$

Необхідний момент опору поперечного перерізу

$$W_0 \geq \frac{M_{\text{пр}}}{[\sigma]} = \frac{5,41 \times 10^{-3}}{80} \times 10^6 = 67,6 \text{ см}^3.$$

Якщо для круга

$$W_0 = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1 d^3,$$

то діаметр дорівнює:

$$d = \sqrt[3]{\frac{W_0}{0,1}} = \sqrt[3]{\frac{67,6}{0,1}} = 8,8 \text{ см}.$$

Приймаємо діаметр, кратний 5 мм, тобто $d = 90 \text{ мм} = 9,0 \text{ см}$.

Задача 1.8

На проміжний вал редуктора насаджені два зубчасті колеса (рис. 1.22). Діаметр першого колеса $D_1 = 0,8 \text{ м}$, діаметр другого колеса $D_2 = 0,4 \text{ м}$. Передана потужність $K = 50 \text{ кВт}$, кутова швидкість $n = 150 \text{ об/хв}$. Визначити діаметр вала, використовуючи четверту теорію міцності, якщо допустиме напруження $[\sigma] = 80 \text{ МПа}$. При обчисленнях прийняти, що радіальна сила $T_1 = 0,32P_1$, осьова сила $S_1 = 0,4P_1$. Виконати перевірочний розрахунок вала на міцність, з огляду на поздовжню силу.

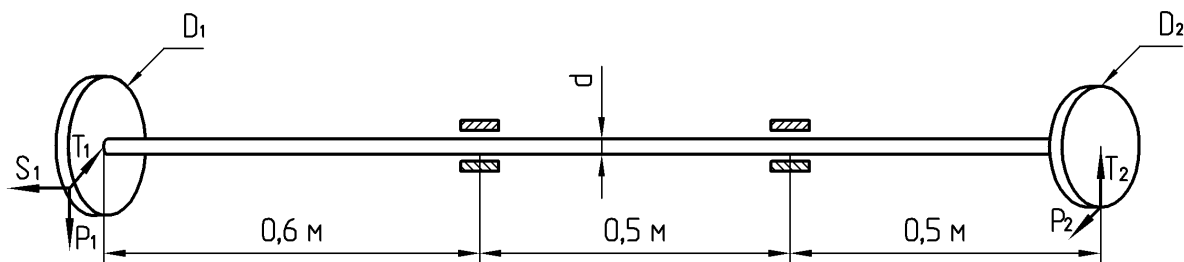


Рисунок 1.22

Розв'язання

1 Обчислюємо крутний момент, що передається валом, за формулою

$$M_{\text{кр}} = \frac{30K}{\pi n} \approx 9,55 \frac{K}{n},$$

$$M_{\text{кр}} = 9,55 \frac{50}{150} = 3,18 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2 За знайденим крутним моментом знаходимо сили в зачепленні (рис. 1.23, а):

$$P_i = \frac{2M_{\text{кр}}}{D_i},$$

$$P_1 = \frac{2M_{\text{кр}}}{D_1} = \frac{2 \cdot 3,18}{0,8} = 7,96 \text{ кН},$$

$$P_2 = \frac{2M_{\text{кр}}}{D_2} = \frac{2 \cdot 3,18}{0,4} = 15,90 \text{ кН},$$

а потім радіальні сили ($T_i = 0,32P_i$) і осьову силу ($S_i = 0,4P_i$):

$$T_1 = 0,32P_1 = 0,32 \cdot 7,96 = 2,55 \text{ кН},$$

$$T_2 = 0,32P_2 = 0,32 \cdot 15,90 = 5,09 \text{ кН},$$

$$S_1 = 0,4P_1 = 0,4 \cdot 7,96 = 3,18 \text{ кН}.$$

Якщо сила S_1 не пересікає вісь вала, то вона створює зосереджений момент M_{S1} . Обчислюємо момент M_{S1} за наступною формулою:

$$M_{S1} = S_1 \frac{D_1}{2} = 3,18 \cdot \frac{0,8}{2} = 1,27 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3 Приводимо всі сили до центра ваги перерізу вала (рис. 1.23, б). У вертикальній площині на вал діють колова сила $P_1 = 7,96$ кН та радіальна сила $T_2 = 5,09$ кН; у горизонтальній площині на вал діють радіальна сила $T_1 = 2,55$ кН, колова сила $P_2 = 15,90$ кН та зосереджений момент $M_{S1} = 1,27$ кН·м. Так як сили P_1 та P_2 не перетинають вісь вала, то вони створюють крутний момент $M_{\text{кр}} = 3,18$ кН·м.

Аналіз схеми навантаження вала зосередженими силами та крутними моментами (див. рис. 1.23, б) показує, що вал працює на згинання у вертикальній площині, згинання у горизонтальній площині та кручення. Розглянемо кожну деформацію окремо, користуючись принципом незалежності дії сил.

4 Розглянемо згинання у вертикальній площині. Вал навантажений коловою $P_1 = 7,96$ кН та радіальною $T_2 = 5,09$ кН силами (рис. 1.23, в).

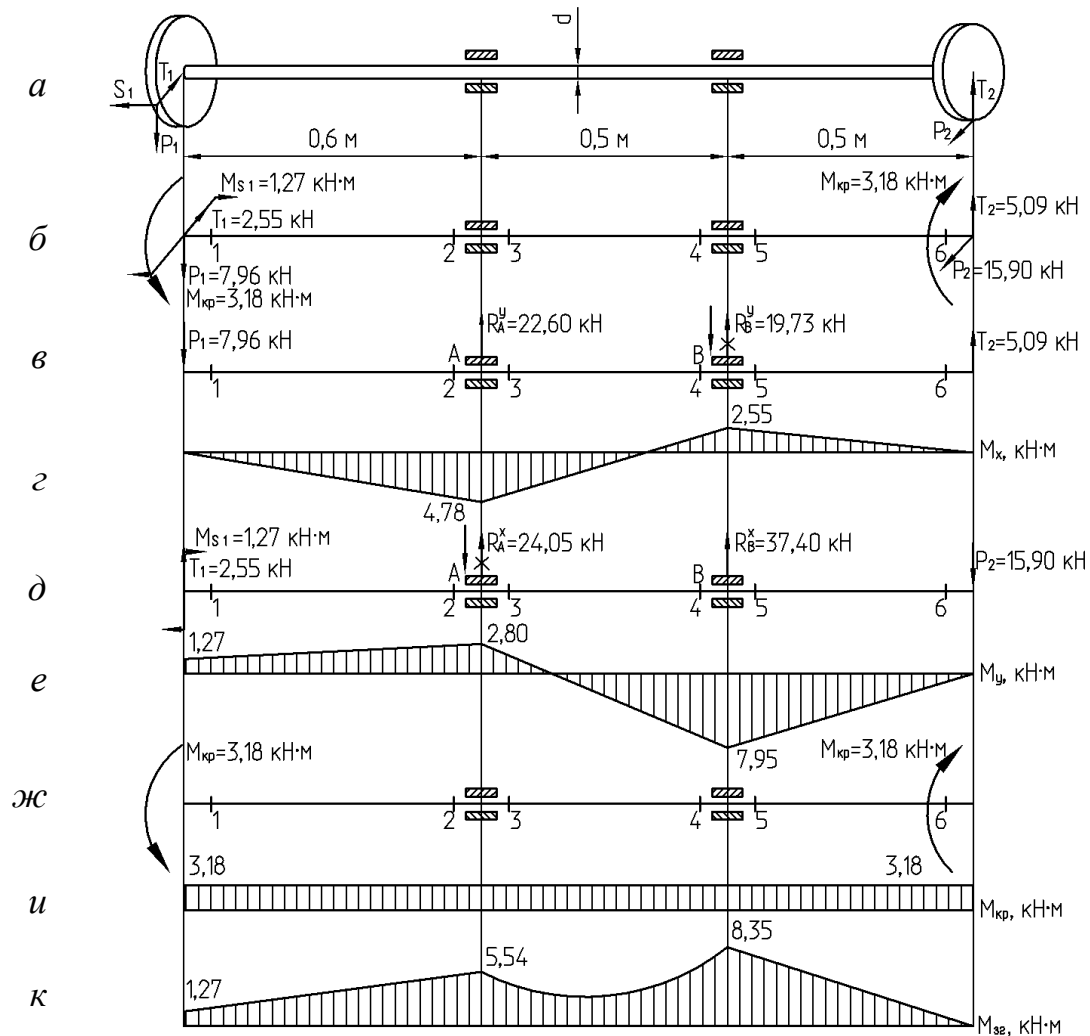


Рисунок 1.23

Визначаємо опорні реакції у вертикальній площині, дорівнюючи нулю суми моментів усіх зовнішніх сил відносно точок А та В (див. рис. 1.23, в):

$$\sum M_A = 0,$$

$$P_1 \cdot 0,6 + T_2 \cdot 1,0 + R_B^y \cdot 0,5 = 0,$$

$$R_B^y = \frac{-P_1 \cdot 0,6 - T_2 \cdot 1,0}{0,5} = \frac{-7,96 \cdot 0,6 - 5,09 \cdot 1,0}{0,5} = -19,73 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$P_1 \cdot 1,1 + T_2 \cdot 0,5 - R_A^y \cdot 0,5 = 0,$$

$$R_A^y = \frac{P_1 \cdot 1,1 + T_2 \cdot 0,5}{0,5} = \frac{7,96 \cdot 1,1 + 5,09 \cdot 0,5}{0,5} = 22,60 \text{ кН}.$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$\begin{aligned} -P_1 + T_2 + R_A^y + R_B^y &= 0, \\ -7,96 + 5,09 + 22,60 - 19,73 &= 0, \\ -27,69 + 27,69 &= 0, \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах, що виникають у вертикальній площині:

$$\begin{aligned} M_{x1} &= M_{x6} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M_{x2} &= M_{x3} = -P_1 \cdot 0,6 = -7,96 \cdot 0,6 = -4,78 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M_{x4} &= M_{x5} = T_2 \cdot 0,5 = 5,09 \cdot 0,5 = 2,55 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів у вертикальній площині M_x за характерними перерізами (рис. 1.23, г).

5 Розглянемо згинання у горизонтальній площині. Вал навантажений радіальною $T_1 = 2,55 \text{ кН}$ та коловою $P_2 = 15,90 \text{ кН}$ силами, а також зосередженим моментом $M_{S1} = 1,27 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (рис. 1.23, д).

Визначаємо опорні реакції в горизонтальній площині, дорівнюючи нулю суми моментів усіх зовнішніх сил відносно точок А та В (див. рис. 1.21, д):

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0, \\ -M_{S1} - T_1 \cdot 0,6 - P_2 \cdot 1,0 + R_B^x \cdot 0,5 &= 0, \\ R_B^x &= \frac{M_{S1} + T_1 \cdot 0,6 + P_2 \cdot 1,0}{0,5} = \frac{1,27 + 2,55 \cdot 0,6 + 15,90 \cdot 1,0}{0,5} = 37,40 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0, \\ -M_{S1} - T_1 \cdot 1,1 - P_2 \cdot 0,5 - R_A^x \cdot 0,5 &= 0, \\ R_A^x &= \frac{-M_{S1} - T_1 \cdot 1,1 - P_2 \cdot 0,5}{0,5} = \frac{-1,27 - 2,55 \cdot 1,1 - 15,90 \cdot 0,5}{0,5} = -24,05 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_x = 0$:

$$\begin{aligned}
T_1 - P_2 + R_A^x + R_B^x &= 0, \\
2,55 - 15,90 - 24,05 + 37,40 &= 0, \\
39,95 - 39,95 &= 0, \\
0 &= 0.
\end{aligned}$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах, що виникають у горизонтальній площині:

$$\begin{aligned}
M_{y1} &= M_{S1} = 1,27 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\
M_{y2} = M_{y3} &= M_{S1} + T_1 \cdot 0,6 = 1,27 + 2,55 \cdot 0,6 = 2,80 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\
M_{y4} = M_{y5} &= -P_2 \cdot 0,5 = -15,90 \cdot 0,5 = -7,95 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\
M_{y6} &= 0 \text{ кН} \cdot \text{м}.
\end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів у горизонтальній площині M_y за характерними перерізами (рис. 1.23, е).

6 Вал навантажений двома зосередженими моментами $M_{кр} = 2,39 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (рис. 1.23, ж), які визивають кручення вала на ділянці від перерізу 1 до перерізу 6. Будуємо епюру крутних моментів $M_{кр}$ (рис. 1.23, и).

7 Для кожного перерізу вала знаходимо повний згинальний момент $M_{изг}$ як геометричну суму обох складових:

$$\begin{aligned}
M_{зг} &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2}, \\
M_{зг1} &= \sqrt{0^2 + 1,27^2} = 1,27 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\
M_{зг2} = M_{зг3} &= \sqrt{4,78^2 + 2,80^2} = 5,54 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\
M_{зг4} = M_{зг5} &= \sqrt{2,55^2 + 7,95^2} = 8,35 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\
M_{зг6} &= 0 \text{ кН} \cdot \text{м}.
\end{aligned}$$

Будуємо епюру повних згинальних моментів $M_{зг}$ (рис. 1.23, к).

8 Визначаємо небезпечний переріз і діаметр вала.

Аналіз епюри повних згинальних моментів $M_{зг}$ і епюри крутних моментів $M_{кр}$ показує, що небезпечними перерізами є перерізи 4 та 5. Для цих перерізів визначаємо розрахунковий момент за четвертою теорією міцності:

$$M_{\text{пр}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{2,55^2 + 7,95^2 + 0,75 \cdot 3,18^2} = 8,82 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Основна умова міцності

$$\sigma = \frac{M_{\text{пр}}}{W_0} \leq [\sigma].$$

Необхідний момент опору поперечного перерізу

$$W_0 \geq \frac{M_{\text{пр}}}{[\sigma]} = \frac{8,82 \times 10^{-3}}{80} \times 10^6 = 110,2 \text{ см}^3.$$

Якщо для круга

$$W_0 = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3,$$

то діаметр дорівнює:

$$d = \sqrt[3]{\frac{W_0}{0,1}} = \sqrt[3]{\frac{110,2}{0,1}} = 10,3 \text{ см}.$$

Приймаємо діаметр, кратний 5 мм, тобто $d = 105 \text{ мм} = 10,5 \text{ см}$.

9 Виконуємо перевірку міцності вала з урахуванням поздовжньої сили. При зазначеному навантаженні поздовжньою силою є сила $S_1 = 3,18 \text{ кН}$, тобто $N = S_1 = 3,18 \text{ кН}$.

Визначаємо геометричні характеристики перерізу:

$$\text{– площа перерізу } F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 10,5^2}{4} = 86,5 \text{ см}^2,$$

$$\text{– осьовий момент опору } W_0 = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 10,5^3}{32} = 113,6 \text{ см}^3,$$

$$\text{– полярний момент опору } W_p = 2W_0 = 2 \cdot 113,6 = 227,2 \text{ см}^3.$$

Обчислюємо нормальне напруження в небезпечному перерізі:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_{\text{зг}}}{W_0} = \frac{3,18 \times 10^{-3}}{86,5 \times 10^{-4}} + \frac{8,35 \times 10^{-3}}{113,6 \times 10^{-6}} = 73,9 \text{ МПа}.$$

Обчислюємо дотичні напруження в небезпечному перерізі:

$$\tau = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} = \frac{3,18 \times 10^{-3}}{227,2 \times 10^{-6}} = 14,0 \text{ МПа}.$$

За четвертою теорією міцності визначаємо еквівалентні напруження:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_{\text{зг}}^2 + 3\tau_{\text{кр}}^2} = \sqrt{73,9^2 + 3 \cdot 14,0^2} = 77,8 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 80 \text{ МПа}.$$

Як видно з розрахунку, міцність вала забезпечена.

Задача 1.9

На проміжний вал редуктора насаджені два зубчасті колеса (рис. 1.24). Діаметр першого колеса $D_1 = 0,5 \text{ м}$, діаметр другого колеса $D_2 = 0,3 \text{ м}$. Передана потужність $K = 40 \text{ кВт}$, кутова швидкість $n = 200 \text{ об/хв}$. Визначити діаметр вала, використовуючи третю теорію міцності, якщо допустиме напруження $[\sigma] = 80 \text{ МПа}$. При обчисленнях прийняти, що радіальна сила $T_1 = 0,32P_1$, осьова сила $S_1 = 0,4P_1$. Виконати перевірочний розрахунок вала на міцність, з урахуванням поздовжньої сили.

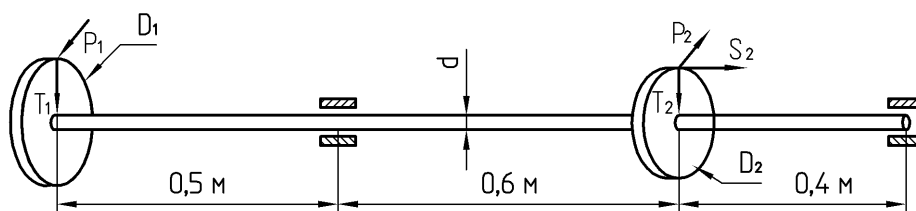


Рисунок 1.24

Розв'язання

1 Обчислюємо крутний момент, що передається валом, за формулою

$$M_{\text{кр}} = \frac{30K}{\pi n} \approx 9,55 \frac{K}{n},$$

$$M_{\text{кр}} = 9,55 \frac{40}{200} = 1,91 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2 За знайденим крутним моментом знаходимо сили в зачепленні (рис. 1.25, а):

$$P_i = \frac{2M_{\text{кр}}}{D_i},$$

$$P_1 = \frac{2M_{кр}}{D_1} = \frac{2 \cdot 1,91}{0,5} = 7,64 \text{ кН},$$

$$P_2 = \frac{2M_{кр}}{D_2} = \frac{2 \cdot 1,91}{0,3} = 12,73 \text{ кН},$$

а потім радіальні сили ($T_i = 0,32P_i$) і осьову силу ($S_i = 0,4P_i$):

$$T_1 = 0,32P_1 = 0,32 \cdot 7,64 = 2,44 \text{ кН},$$

$$T_2 = 0,32P_2 = 0,32 \cdot 12,73 = 4,07 \text{ кН},$$

$$S_2 = 0,4P_2 = 0,4 \cdot 12,73 = 5,09 \text{ кН}.$$

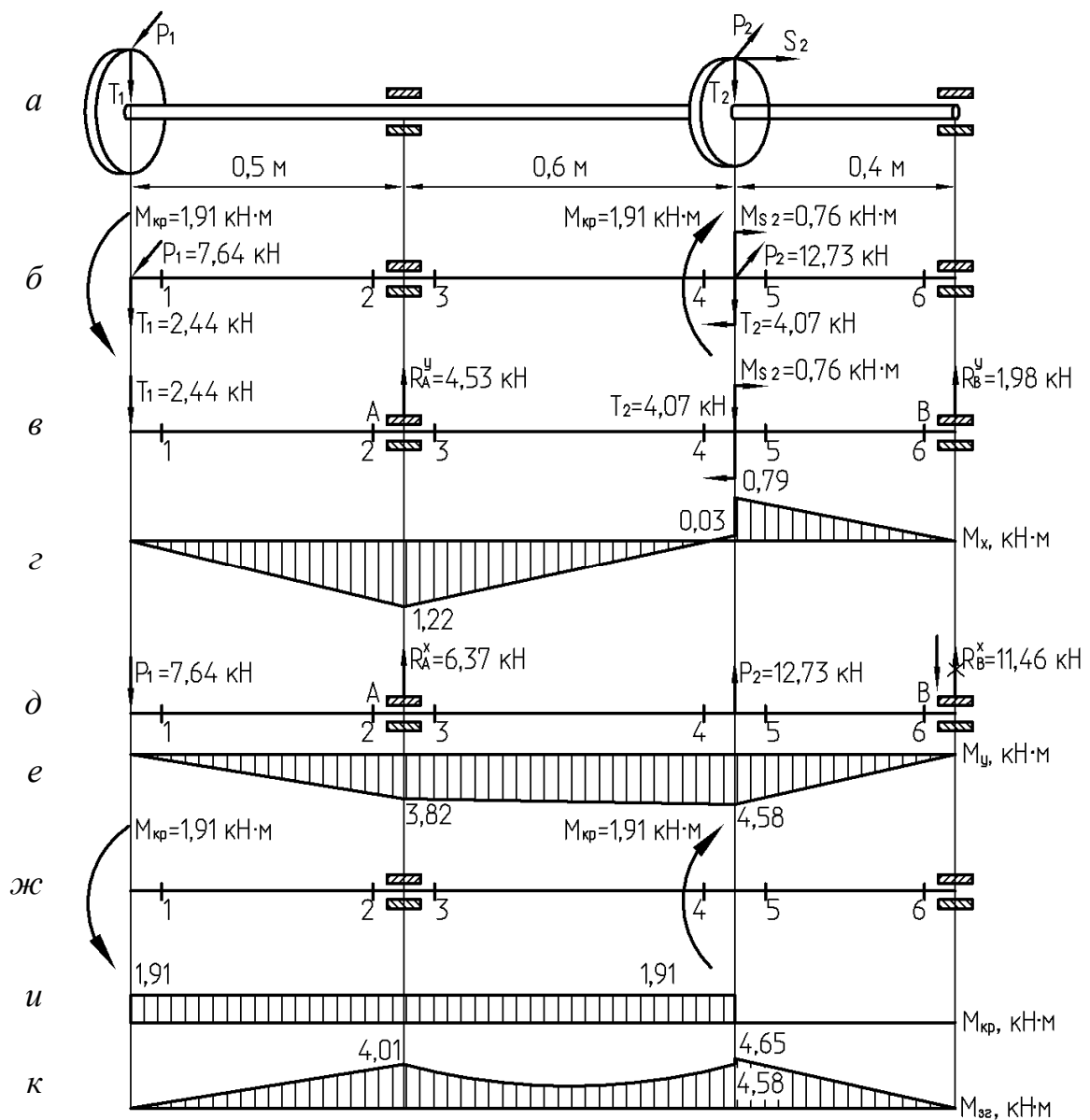


Рисунок 1.25

Якщо сила S_1 не перетинає вісь вала, то вона створює зосереджений момент M_{S_2} . Обчислюємо момент M_{S_2} за наступною формулою:

$$M_{S_2} = S_2 \frac{D_2}{2} = 5,09 \cdot \frac{0,3}{2} = 0,76 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3 Приводимо всі сили до центра ваги перерізу вала (рис. 1.25, б). У вертикальній площині на вал діють радіальні сили $T_1 = 2,44 \text{ кН}$, $T_2 = 4,07 \text{ кН}$ і зосереджений момент $M_{S_2} = 0,76 \text{ кН} \cdot \text{м}$; у горизонтальній площині на вал діють окружні сили $P_1 = 7,64 \text{ кН}$ та $P_2 = 12,73 \text{ кН}$. Якщо сили P_1 та P_2 не перетинають вісь вала, то вони створюють крутний момент $M_{\text{кр}} = 1,91 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

4 Розглянемо згинання у вертикальній площині. Вал навантажений радіальними силами $T_1 = 2,44 \text{ кН}$ і $T_2 = 4,07 \text{ кН}$, а також зосередженим моментом $M_{S_2} = 0,76 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (рис. 1.25, в).

Визначаємо опорні реакції у вертикальній площині, дорівнюючи нулю суми моментів усіх зовнішніх сил відносно точок А та В (див. рис. 1.25, в):

$$\sum M_A = 0,$$

$$-M_{S_2} + T_1 \cdot 0,5 - T_2 \cdot 0,6 + R_B^y \cdot 1,0 = 0,$$

$$R_B^y = \frac{M_{S_2} - T_1 \cdot 0,5 + T_2 \cdot 0,6}{1,0} = \frac{0,76 - 2,44 \cdot 0,5 + 4,07 \cdot 0,6}{1,0} = 1,98 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$-M_{S_2} + T_1 \cdot 1,5 + P_2 \cdot 0,4 - R_A^y \cdot 1,0 = 0,$$

$$R_A^y = \frac{-M_{S_2} + T_1 \cdot 1,5 + P_2 \cdot 0,4}{1,0} = \frac{-0,76 + 2,44 \cdot 1,5 + 4,07 \cdot 0,4}{1,0} = 4,53 \text{ кН}.$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$-T_1 - T_2 + R_A^y + R_B^y = 0,$$

$$-2,44 - 4,07 + 4,53 + 1,98 = 0,$$

$$-6,51 + 6,51 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах, що виникають у вертикальній площині:

$$M_{x1} = M_{x6} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{x2} = M_{x3} = -T_1 \cdot 0,5 = -2,44 \cdot 0,5 = -1,22 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{x5} = R_B^y \cdot 0,4 = 1,98 \cdot 0,4 = 0,79 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{x4} = R_B^y \cdot 0,4 - M_{S2} = 1,98 \cdot 0,4 - 0,76 = 0,03 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів у вертикальній площині M_x за характерними перерізами (рис. 1.25, г).

5 Розглянемо згинання у горизонтальній площині. Вал навантажений окружними силами $P_1 = 7,64 \text{ кН}$ та $P_2 = 12,73 \text{ кН}$ (рис. 1.25, д).

Визначаємо опорні реакції в горизонтальній площині, дорівнюючи нулю суми моментів всіх зовнішніх сил відносно точок А та В (див. рис. 1.25, д):

$$\sum M_A = 0,$$

$$P_1 \cdot 0,5 + P_2 \cdot 0,6 + R_B^x \cdot 1,0 = 0,$$

$$R_B^x = \frac{-P_1 \cdot 0,5 - P_2 \cdot 0,6}{1,0} = \frac{-7,64 \cdot 0,5 - 12,73 \cdot 0,6}{1,0} = -11,46 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$P_1 \cdot 1,5 - P_2 \cdot 0,4 - R_A^x \cdot 1,0 = 0,$$

$$R_A^x = \frac{P_1 \cdot 1,5 - P_2 \cdot 0,4}{1,0} = \frac{7,64 \cdot 1,5 - 12,73 \cdot 0,4}{1,0} = 6,37 \text{ кН}.$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_x = 0$:

$$-P_1 + P_2 + R_A^x + R_B^x = 0,$$

$$-7,64 + 12,73 + 6,37 - 11,46 = 0,$$

$$19,10 - 19,10 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах, що виникають у горизонтальній площині:

$$M_{y1} = M_{y6} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{y2} = M_{y3} = -P_1 \cdot 0,5 = -7,64 \cdot 0,5 = -3,82 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{y4} = M_{y5} = -R_B^x \cdot 0,4 = -11,46 \cdot 0,4 = -4,58 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів у горизонтальній площині M_y за характерними перерізами (рис. 1.25, е).

6 Вал навантажений двома зосередженими моментами $M_{кр} = 1,91 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (рис. 1.25, ж), які визивають кручення вала на ділянці від перерізу 1 до перерізу 4. Будуємо епюру крутних моментів $M_{кр}$ (рис. 1.25, и).

7 Для кожного перерізу вала знаходимо повний згинальний момент $M_{зг}$ як геометричну суму обох складових:

$$M_{зг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2},$$

$$M_{зг1} = M_{зг6} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{зг2} = M_{зг3} = \sqrt{1,22^2 + 3,82^2} = 4,01 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{зг4} = \sqrt{0,03^2 + 4,58^2} = 4,58 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{зг5} = \sqrt{0,79^2 + 4,58^2} = 4,65 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюру повних згинальних моментів $M_{зг}$ (рис. 1.25, к).

8 Визначаємо небезпечний переріз і діаметр вала.

Аналіз епюри повних згинальних моментів $M_{зг}$ та епюри крутних моментів $M_{кр}$ показує, що небезпечним перерізом є переріз 4. Для цього перерізу визначаємо розрахунковий момент за третьою теорією міцності:

$$M_{пр}^{III} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{кр}^2} = \sqrt{0,03^2 + 4,58^2 + 1,91^2} = 4,96 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Основна умова міцності

$$\sigma = \frac{M_{пр}}{W_0} \leq [\sigma].$$

Необхідний момент опору поперечного перерізу

$$W_0 \geq \frac{M_{пр}}{[\sigma]} = \frac{4,96 \times 10^{-3}}{80} \times 10^6 = 62,0 \text{ см}^3.$$

Якщо для круга

$$W_0 = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3,$$

то діаметр дорівнює:

$$d = \sqrt[3]{\frac{W_0}{0,1}} = \sqrt[3]{\frac{62,0}{0,1}} = 8,6 \text{ см.}$$

Приймаємо діаметр, кратний 5 мм, тобто $d = 90 \text{ мм} = 9,0 \text{ см}$.

9 Виконуємо перевірку міцності вала з урахуванням поздовжньої сили. При зазначеному навантаженні поздовжньою силою є сила $S_2 = 5,09 \text{ кН}$, тобто $N = S_2 = 5,09 \text{ кН}$.

Визначаємо геометричні характеристики перерізу:

$$\text{– площа перерізу } F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 9,0^2}{4} = 63,6 \text{ см}^2,$$

$$\text{– осьовий момент опору } W_o = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 9,0^3}{32} = 71,5 \text{ см}^3,$$

$$\text{– полярний момент опору } W_p = 2W_o = 2 \cdot 71,5 = 143,0 \text{ см}^3.$$

Обчислюємо нормальне напруження в небезпечному перерізі:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_{зг}}{W_o} = \frac{5,09 \times 10^{-3}}{63,6 \times 10^{-4}} + \frac{4,58 \times 10^{-3}}{71,5 \times 10^{-6}} = 64,9 \text{ МПа}.$$

Обчислюємо дотичні напруження в небезпечному перерізі:

$$\tau = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{1,91 \times 10^{-3}}{143,0 \times 10^{-6}} = 13,4 \text{ МПа}.$$

За третьою теорією міцності визначаємо еквівалентні напруження:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{зг}^2 + 3\tau_{кр}^2} = \sqrt{64,9^2 + 4 \cdot 13,4^2} = 70,2 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 80 \text{ МПа}.$$

Як видно з розрахунку, міцність вала забезпечена.

2 ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ БАЛОК ТА РАМ

При згинанні в площині симетрії вісь балки викривляється, залишаючись у площині навантаження. У результаті кожен переріз (центр ваги) одержує вертикальне переміщення (прогин y) і повертається на деякий кут θ (рис. 2.1).

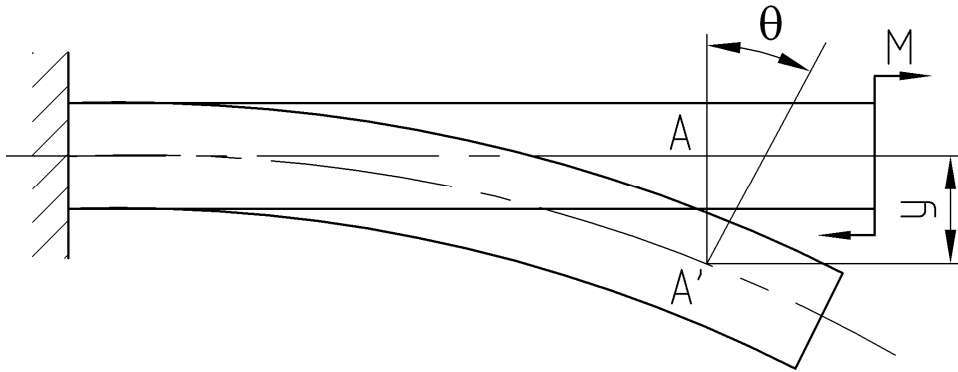


Рисунок 2.1

Універсальним способом для визначення лінійних і кутових переміщень у будь-яких плоских і просторових системах, які складаються із шарнірно або жорстко з'єднаних прямих або кривих брусів, є метод Мору. Найбільше застосування метод Мору знайшов для балок і рам, які випробовують деформацію згинання. Мета даного методу – визначення лінійних і кутових переміщень конкретних перерізів.

Порядок визначення переміщень наступний: до балки (раму), звільненої від зовнішніх навантажень, до перерізу, переміщення якого визначається, прикладається одинична сила, якщо визначається лінійне переміщення, або одиничний момент, якщо визначається кутове переміщення, у напрямку шуканого переміщення.

Шукане лінійне (кутове) переміщення Δ_{ip} визначається за допомогою інтеграла Мору:

$$\Delta_{ip} = \int_{\ell} \frac{M_{xp} \overline{M}_i}{EJ_x} dz, \quad (2.1)$$

де M_{xp} – рівняння згинальних моментів від заданого навантаження;

\overline{M}_i – рівняння згинальних моментів від одиничного навантаження.

Одним зі спрощених рішень інтеграла Мору є визначення переміщень за формулою крайніх ординат. Формулу крайніх ординат варто записувати для кожної прямолінійної ділянки епюри, тобто для ділянки без зламу епюри.

Розглянемо одну з ділянок балки або рами (рис. 2.2).

Формула крайніх ординат має такий вигляд:

$$\Delta_{ip} = \frac{1}{6EJ_x} (2M_{л}a + 2M_{пр}b + M_{л}b + M_{пр}a) + \frac{ql^3}{24EJ_x} (a + b), \quad (2.2)$$

де $M_{л}$, $M_{пр}$ – ліва та права ординати розглянутої ділянки вантажної епюри;

a , b – ліва та права ординати розглянутої ділянки одиничної епюри.

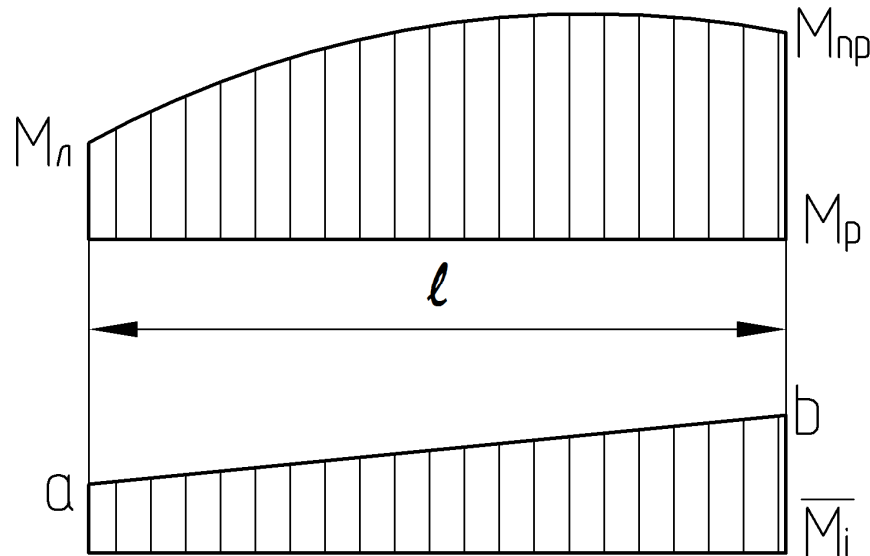


Рисунок 2.2

Другий доданок у формулі (2.2) називається поправкою на кривизну епюри та використовується, природно, тільки на тих ділянках, де прикладене розподілене навантаження інтенсивності q .

Правило знаків для першого доданка формули (2.2) наступне: якщо відповідні ординати на епюрах M_p і \bar{M}_i спрямовані в один бік від базової лінії, то результат «перемножування» епюр має знак «плюс».

Правило знаків для поправки на кривизну, тобто для другого доданка формули (2.2) наступне: ординати одиничної епюрі \bar{M}_i , що збігаються з напрямком опуклості параболи на вантажній епюрі, мають знак «плюс».

Задача 2.1

Визначити прогин у точці C та кут повороту перерізу D для балки, яка подана на рисунку 2.3, а. Переріз балки показано на рисунку 2.3, б.

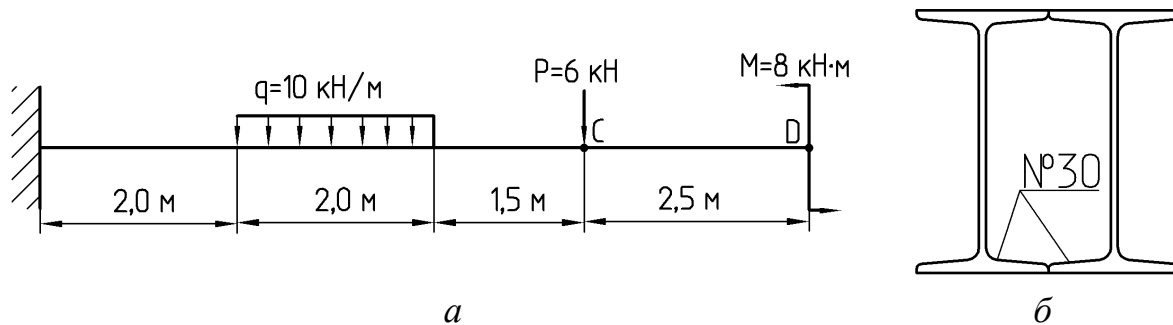


Рисунок 2.3

Розв'язання

1 Будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження. Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 2.4, а):

$$M_1 = M_2 = M_3 = M = 8 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = M_5 = -P \cdot 1,5 + M = -6 \cdot 1,5 + 8 = -1 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = M_7 = -P \cdot 3,5 - q \cdot 2 \cdot 1 + M = -6 \cdot 3,5 - 10 \cdot 2 \cdot 1 + 8 = -33 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_8 = -P \cdot 5,5 - q \cdot 2 \cdot 3 + M = -6 \cdot 5,5 - 10 \cdot 2 \cdot 3 + 8 = -85 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії заданого навантаження за характерними перерізами (рис. 2.4, б).

2 Визначаємо прогин у точці С.

Для цього знімаємо зі стрижневої системи задане навантаження та у точці С прикладаємо одиничну силу, тобто $P = 1$.

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах від дії одиничної сили (рис. 2.4, в):

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0 \text{ м},$$

$$M_4 = M_5 = -P \cdot 1,5 = -1 \cdot 1,5 = -1,5 \text{ м},$$

$$M_6 = M_7 = -P \cdot 3,5 = -1 \cdot 3,5 = -3,5 \text{ м},$$

$$M_8 = -P \cdot 5,5 = -1 \cdot 5,5 = -5,5 \text{ м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничної сили за характерними перерізами (див. рис. 2.4, в).

З використанням формули крайніх ординат «перемножуємо між собою» на кожній ділянці епюри згинальних моментів від дії заданого навантаження та від дії одиничної сили:

$$\begin{aligned}
 y_C = \Delta_{lp} &= \frac{1,5}{6EJ_x} (2 \cdot 1 \cdot 1,5 - 8 \cdot 1,5) + \frac{2,0}{6EJ_x} (2 \cdot 1 \cdot 1,5 + 2 \cdot 33 \cdot 3,5 + 33 \cdot 1,5 + 1 \cdot 3,5) + \\
 &+ \frac{10 \cdot 2,0^3}{24EJ_x} (-3,5 - 1,5) + \frac{2,0}{6EJ_x} (2 \cdot 85 \cdot 5,5 + 2 \cdot 33 \cdot 3,5 + 85 \cdot 3,5 + 33 \cdot 5,5) = \\
 &= \frac{-2,25 + 95,67 - 16,67 + 548,33}{EJ_x} = \frac{625,08}{EJ_x}.
 \end{aligned}$$

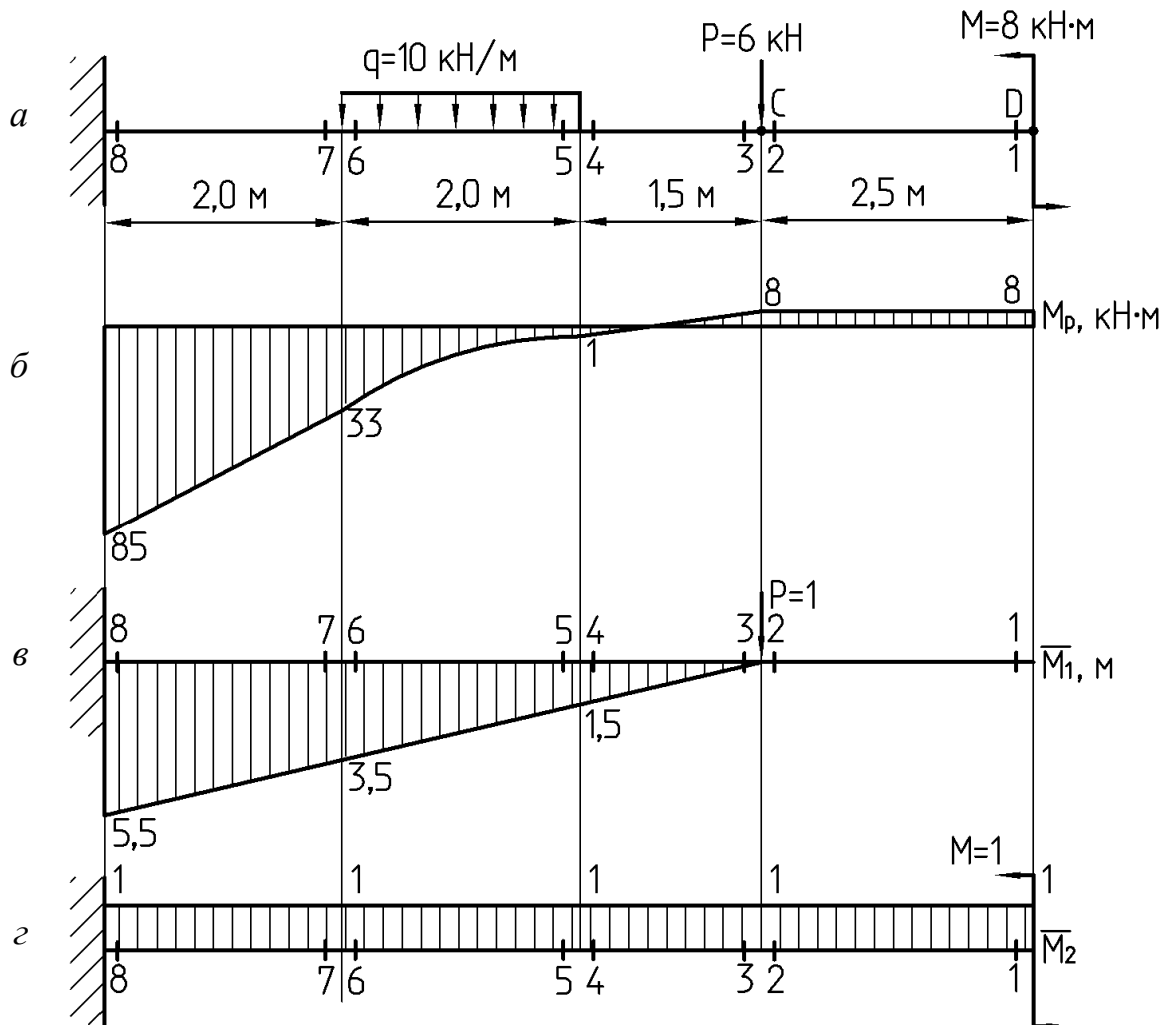


Рисунок 2.4

Якщо переріз балки – два двотаври № 30 ($J_x = 7080 \text{ см}^4$), то момент інерції всього перерізу можна визначити як:

$$J_{xc} = 2J_x = 2 \cdot 7080 = 14160 \text{ см}^4.$$

Тоді прогин у точці С дорівнює:

$$y_c = \frac{625,08 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 14160 \times 10^{-8}} = 0,022 \text{ м.}$$

Результат одержали зі знаком «+». Це вказує на те, що точка переміщується за напрямком одиничної сили, тобто вниз.

Допустимий прогин балки довжиною $\ell = 8 \text{ м}$ дорівнює:

$$[y] = \frac{\ell}{200} = \frac{8}{200} = 0,04 \text{ м.}$$

Якщо прогин у точці С менше, ніж допустимий прогин для балки, то жорсткість балки забезпечена.

3 Визначаємо кут повороту перерізу D.

Для цього знімаємо зі стрижневої системи задане навантаження та у перерізі D прикладаємо одиничний момент, тобто $M = 1$.

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах від дії одиничного моменту (рис. 2.4, г):

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = M_6 = M_7 = M_8 = M = 1.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту за характерними перерізами (див. рис. 2.4, г).

З використанням формули крайніх ординат «перемножуємо між собою» на кожній ділянці епюри згинальних моментів від дії заданого навантаження та від дії одиничного моменту:

$$\begin{aligned} \theta_D = \Delta_{2p} &= \frac{2,5}{6EJ_x} (2 \cdot 8 \cdot 1 + 2 \cdot 8 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 8 \cdot 1) + \frac{1,5}{6EJ_x} (-2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 8 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 8 \cdot 1) + \\ &+ \frac{2,0}{6EJ_x} (-2 \cdot 33 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 33 \cdot 1 - 1 \cdot 1) + \frac{10 \cdot 2,0^3}{24EJ_x} (1 + 1) + \\ &+ \frac{2,0}{6EJ_x} (-2 \cdot 85 \cdot 1 - 2 \cdot 33 \cdot 1 - 85 \cdot 1 - 33 \cdot 1) = \frac{20 + 5,25 - 34 + 6,67 - 118}{EJ_x} = \frac{-120,08}{EJ_x}. \end{aligned}$$

Кут повороту перерізу D дорівнює:

$$\theta_D = \frac{-120,08 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 14160 \times 10^{-8}} = -0,0042 \text{ рад.}$$

Результат одержали зі знаком «-». Це вказує на те, що переріз D повертається за напрямком годинникової стрілки.

Допустимий кут повороту перерізу дорівнює:

$$[\theta] = 2^\circ = 0,0349 \text{ рад.}$$

Якщо кут повороту перерізу D менше, ніж допустимий, то жорсткість балки забезпечена.

Задача 2.2

Визначити прогин у точці C і кут повороту перерізу D для балки, яка подана на рисунку 2.5, а. Переріз балки наведений на рисунку 2.5, б.

Розв'язання

1 Будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження.

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження, дорівнюючи нулю суми моментів усіх зовнішніх сил відносно точок A та B (рис 2.6, а):

$$\sum M_A = 0,$$

$$M - q \cdot 3 \cdot 2,5 + R_B \cdot 6 = 0,$$

$$R_B = \frac{-M + q \cdot 3 \cdot 2,5}{6} = \frac{-15 + 6 \cdot 3 \cdot 2,5}{6} = 5 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$M + q \cdot 3 \cdot 3,5 - R_A \cdot 6 = 0,$$

$$R_A = \frac{M + q \cdot 3 \cdot 3,5}{6} = \frac{15 + 6 \cdot 3 \cdot 3,5}{6} = 13 \text{ кН.}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$-q \cdot 3 + R_A + R_B = 0,$$

$$-6 \cdot 3 + 13 + 5 = 0,$$

$$-18 + 18 = 0,$$

$$0 = 0.$$

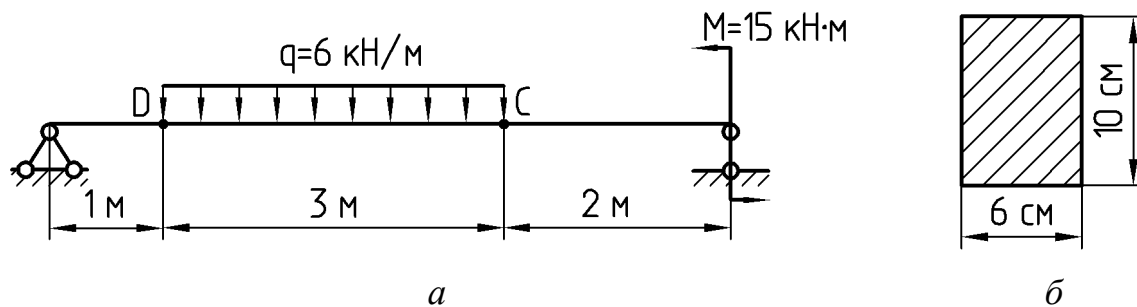


Рисунок 2.5

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис. 2.6, а):

$$M_1 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = R_A \cdot 1 = 13 \cdot 1 = 13 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = M = 15 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = M_5 = M + R_B \cdot 2 = 15 + 5 \cdot 2 = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

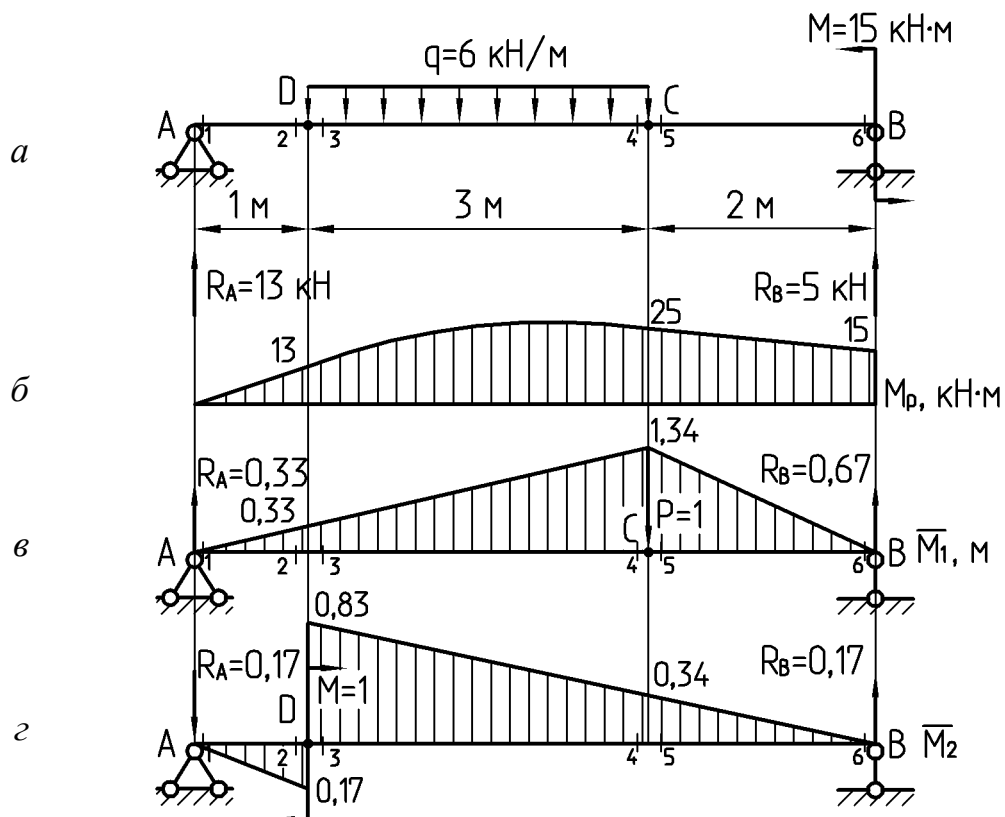


Рисунок 2.6

Будуємо епюру згинальних моментів від дії заданого навантаження за характерними перерізами (рис. 2.6, б).

2 Визначаємо прогин у точці С.

Для цього знімаємо зі стрижневої системи задане навантаження та у точці С прикладаємо одиничну силу, тобто $P = 1$.

Визначаємо опорні реакції від дії одиничної сили, дорівнюючи нулю суми моментів усіх зовнішніх сил відносно точок А та В (рис. 2.6, в):

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, \\ -P \cdot 4 + R_B \cdot 6 &= 0, \\ R_B &= \frac{P \cdot 4}{6} = \frac{1 \cdot 4}{6} = 0,67.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0, \\ P \cdot 2 - R_A \cdot 6 &= 0, \\ R_A &= \frac{P \cdot 2}{6} = \frac{1 \cdot 2}{6} = 0,33.\end{aligned}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$\begin{aligned}-P + R_A + R_B &= 0, \\ -1 + 0,33 + 0,67 &= 0, \\ -1 + 1 &= 0, \\ 0 &= 0.\end{aligned}$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах від дії одиничної сили (див. рис. 2.4, в):

$$\begin{aligned}M_1 &= M_6 = 0 \text{ м}, \\ M_2 &= M_3 = R_A \cdot 1 = 0,33 \cdot 1 = 0,33 \text{ м}, \\ M_4 &= M_5 = R_B \cdot 2 = 0,67 \cdot 2 = 1,34 \text{ м}.\end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничної сили за характерними перерізами (див. рис. 2.6, в).

3 Використанням формули крайніх ординат «перемножуємо між собою» на кожній ділянці епюри згинальних моментів від дії заданого навантаження та від дії одиничної сили:

$$y_C = \Delta_{lp} = \frac{1}{6EJ_x}(2 \cdot 13 \cdot 0,33) + \\ + \frac{3}{6EJ_x}(2 \cdot 13 \cdot 0,33 + 2 \cdot 25 \cdot 1,34 + 13 \cdot 1,34 + 25 \cdot 0,33) + \\ + \frac{6 \cdot 3^3}{24EJ_x}(0,33 + 1,34) + \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 25 \cdot 1,34 + 15 \cdot 1,34) = \frac{92,3}{EJ_x}.$$

Якщо переріз балки – прямокутник ($b = 6 \text{ см}$, $h = 10 \text{ см}$), то момент інерції визначається як:

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{6 \cdot 10^3}{12} = 500 \text{ см}^4.$$

Тоді прогин у точці С дорівнює:

$$y_C = \frac{92,3 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 500 \times 10^{-8}} = 0,092 \text{ м}.$$

Результат одержали зі знаком «+». Це вказує на те, що точка переміщається за напрямком одиничної сили, тобто вниз.

3 Визначаємо кут повороту перерізу D.

Для цього знімаємо зі стрижневої системи задане навантаження та у перерізі D прикладаємо одиничний момент, тобто $M = 1$.

Визначаємо опорні реакції від дії одиничного моменту (рис. 2.6, г):

$$R_A = R_B = \frac{M}{6} = \frac{1}{6} = 0,17.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах від дії одиничного моменту (див. рис. 2.6, г):

$$M_1 = M_6 = 0,$$

$$M_2 = -R_A \cdot 1 = -0,17 \cdot 1 = -0,17,$$

$$M_3 = -R_A \cdot 1 + M = -0,17 \cdot 1 + 1 = 0,83,$$

$$M_4 = M_5 = R_B \cdot 2 = 0,17 \cdot 2 = 0,34.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту за характерними перерізами (див. рис. 2.6, г).

З використанням формули крайніх ординат «перемножуємо між собою» на кожній ділянці епюри згинальних моментів від дії заданого навантаження та від дії одиничного моменту:

$$\begin{aligned}\theta_D = \Delta_{2p} = & \frac{1}{6EJ_x}(-2 \cdot 13 \cdot 0,17) + \\ & + \frac{3}{6EJ_x}(2 \cdot 13 \cdot 0,83 + 2 \cdot 25 \cdot 0,34 + 13 \cdot 0,34 + 25 \cdot 0,83) + \\ & + \frac{6 \cdot 3^3}{24EJ_x}(0,83 + 0,34) + \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 25 \cdot 0,34 + 15 \cdot 0,34) = \frac{46,4}{EJ_x}.\end{aligned}$$

Кут повороту перерізу D дорівнює:

$$\theta_D = \frac{46,4 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 500 \times 10^{-8}} = 0,0464 \text{ рад.}$$

Результат одержали зі знаком «+». Це вказує на те, що переріз D повертається за ходом годинникової стрілки.

Задача 2.3

Визначити вертикальне та горизонтальне переміщення, а також кут повороту перерізу A для рами, яка подана на рисунку 2.1. Прийняти момент інерції перерізу $J_x = 2000 \text{ см}^4$.

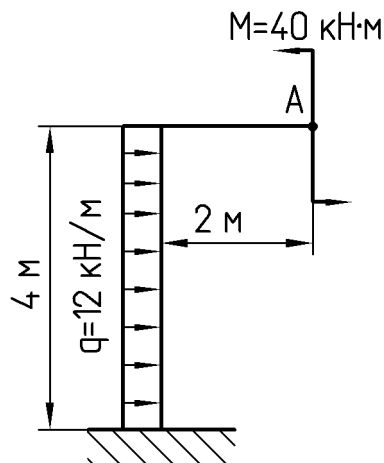


Рисунок 2.7

Розв'язання

1 Будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження.

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 2.8, а):

$$M_1 = M_2 = M_3 = M = 40 \text{ кН} \cdot \text{м},$$
$$M_4 = M - q \cdot 4 \cdot 2 = 40 - 12 \cdot 4 \cdot 2 = -56 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії заданого навантаження за характерними перерізами (рис. 2.8, б).

2 Визначаємо вертикальне переміщення точки А.

Для цього знімаємо зі стрижневої системи задане навантаження та у точці А прикладаємо вертикальну одиничну силу.

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах від дії вертикальної одиничної сили (рис. 2.8, в):

$$M_1 = 0 \text{ м},$$
$$M_2 = M_3 = M_4 = -P \cdot 2 = -1 \cdot 2 = -2 \text{ м},$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії вертикальної одиничної сили за характерними перерізами (див. рис. 2.8, в).

З використанням формули крайніх ординат «перемножуємо між собою» на кожній ділянці епюри згинальних моментів від дії заданого навантаження та від дії вертикальної одиничної сили:

$$\Delta_A^B = \Delta_{Ip} = \frac{2}{6EJ_x}(-2 \cdot 40 \cdot 2 - 40 \cdot 2) +$$
$$+ \frac{4}{6EJ_x}(-2 \cdot 40 \cdot 2 + 2 \cdot 56 \cdot 2 - 40 \cdot 2 + 56 \cdot 2) +$$
$$+ \frac{12 \cdot 4^3}{24EJ_x}(-2 - 2) = \frac{-144}{EJ_x}.$$

Тоді вертикальне переміщення точки А дорівнює:

$$\Delta_A^B = \frac{-144 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 2000 \times 10^{-8}} = -0,036 \text{ м}.$$

Результат одержали зі знаком мінус. Це вказує на те, що точка переміщається по напрямку, протилежному напрямку одиничної сили, тобто вгору.

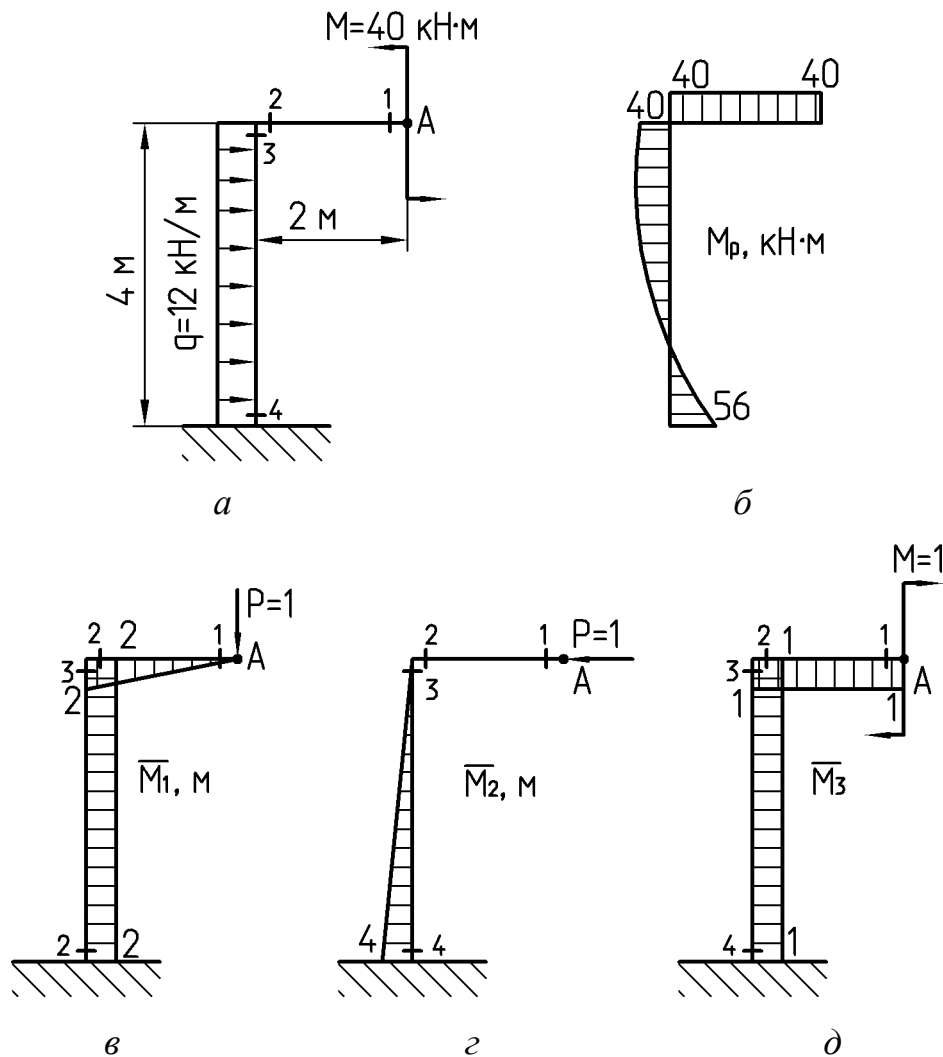


Рисунок 2.8

3 Визначаємо горизонтальне переміщення точки А.

Для цього знімаємо зі стрижневої системи задане навантаження та у точці А прикладаємо горизонтальну одиничну силу.

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах від дії горизонтальної одиничної сили (рис. 2.8, г):

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0 \text{ м},$$

$$M_4 = P \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4 \text{ м},$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії горизонтальної одиничної сили за характерними перерізами (див. рис. 2.8, г).

З використанням формули крайніх ординат «перемножуємо між собою» на кожній ділянці епюри згинальних моментів від дії заданого навантаження та від дії горизонтальної одиничної сили:

$$\Delta_A^{\Gamma} = \Delta_{2p} = \frac{4}{6EJ_x}(-2 \cdot 56 \cdot 4 + 40 \cdot 4) + \frac{12 \cdot 4^3}{24EJ_x}(0 + 4) = \frac{-64}{EJ_x}.$$

Тоді горизонтальне переміщення точки А дорівнює:

$$\Delta_A^B = \frac{-64 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 2000 \times 10^{-8}} = -0,016 \text{ м}.$$

Результат одержали зі знаком «-». Це вказує на те, що точка переміщається за напрямком, протилежним напрямку одиничної сили, тобто вправо.

4 Визначаємо кут повороту перерізу А.

Для цього знімаємо зі стрижневої системи задане навантаження та у перерізі А прикладаємо одиничний момент, тобто $M = 1$.

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах від дії одиничного моменту (рис. 2.8, д):

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = -M = -1.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту за характерними перерізами (див. рис. 2.8, д).

З використанням формули крайніх ординат «перемножуємо між собою» на кожній ділянці епюри згинальних моментів від дії заданого навантаження та від дії одиничного моменту:

$$\begin{aligned} \theta_A = \Delta_{3p} = & \frac{2}{6EJ_x}(-2 \cdot 40 \cdot 1 - 2 \cdot 40 \cdot 1 - 40 \cdot 1 - 40 \cdot 1) + \\ & + \frac{4}{6EJ_x}(-2 \cdot 40 \cdot 1 + 2 \cdot 56 \cdot 1 - 40 \cdot 1 + 56 \cdot 1) + \frac{12 \cdot 4^3}{24EJ_x}(-1 - 1) = \frac{-112}{EJ_x}. \end{aligned}$$

Кут повороту перерізу А дорівнює:

$$\theta_A = \frac{-112 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 2000 \times 10^{-8}} = -0,028 \text{ рад}.$$

Результат одержали зі знаком «-». Це вказує на те, що переріз А повертається проти ходу годинникової стрілки.

Задача 2.4

Визначити горизонтальне переміщення точки A і кут повороту перерізу B для рами, яка зображена на рисунку 2.3. Прийняти момент інерції перерізу $J_x = 2000 \text{ см}^4$.

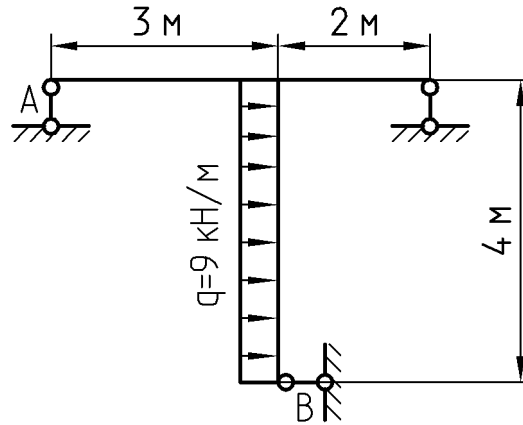


Рисунок 2.9

Розв'язання

1 Будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження.

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження (рис. 2.10, а):

$$\sum P_z = 0,$$

$$q \cdot 4 - R_B = 0,$$

$$R_B = q \cdot 4 = 9 \cdot 4 = 36 \text{ кН}.$$

$$\sum M_D = 0,$$

$$-q \cdot 4 \cdot 2 + R_C \cdot 5 = 0,$$

$$R_C = \frac{q \cdot 4 \cdot 2}{5} = \frac{9 \cdot 4 \cdot 2}{5} = 14,4 \text{ кН}.$$

$$\sum P_y = 0,$$

$$-R_A + R_C = 0,$$

$$R_A = R_C = 14,4 \text{ кН}.$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum M_C = 0$:

$$q \cdot 4 \cdot 2 + R_A \cdot 5 - R_B \cdot 4 = 0,$$

$$9 \cdot 4 \cdot 2 + 14,4 \cdot 5 - 36 \cdot 4 = 0,$$

$$144 - 144 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 2.10, а):

$$M_1 = M_3 = M_5 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = -R_A \cdot 3 = -14,4 \cdot 3 = 43,2 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = R_C \cdot 2 = 14,4 \cdot 2 = 28,8 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = R_B \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 = 36 \cdot 4 - 9 \cdot 4 \cdot 2 = 72,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

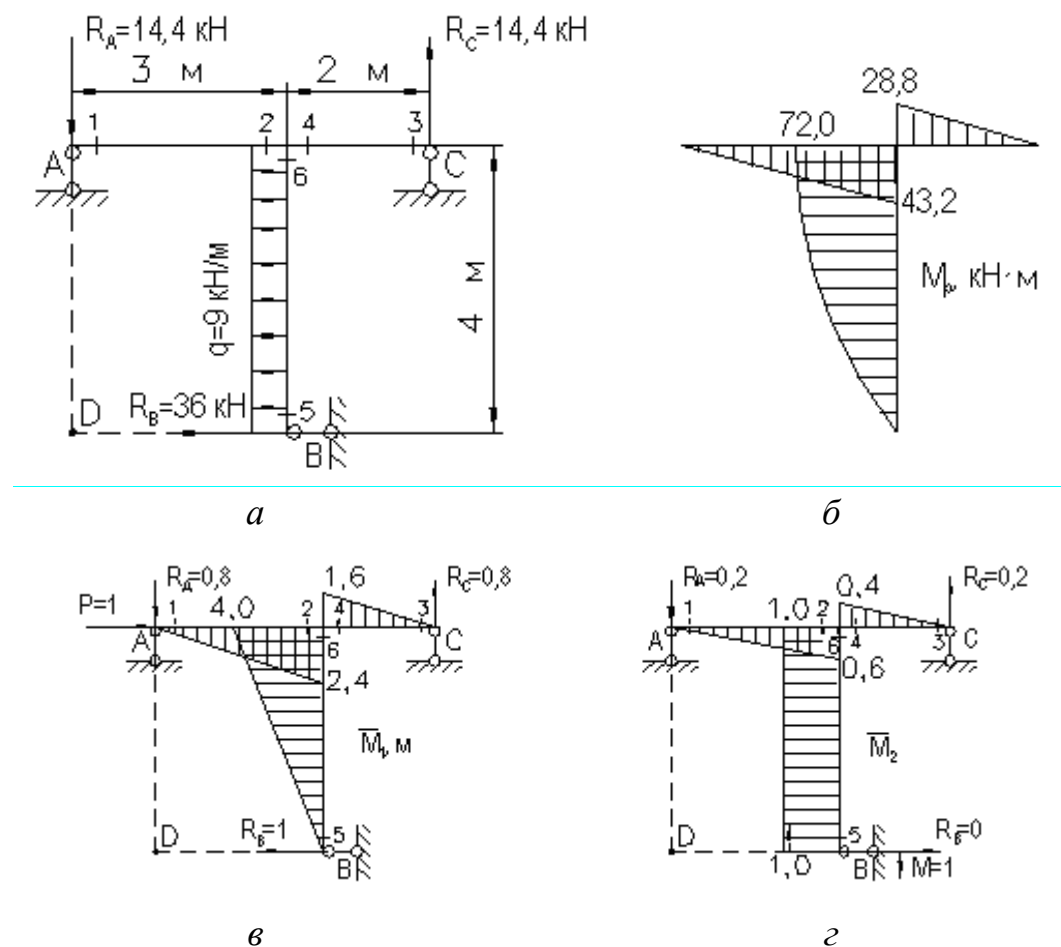


Рисунок 2.10

Будуємо епюру згинальних моментів від дії заданого навантаження за характерними перерізами (рис. 2.10, б).

2 Визначаємо горизонтальне переміщення точки А.

Для цього знімаємо зі стрижневої системи задане навантаження та у точці А прикладаємо горизонтальну одиничну силу.

Визначаємо опорні реакції від дії горизонтальної одиничної сили (рис. 2.10, в):

$$\sum P_z = 0,$$

$$P - R_B = 0,$$

$$R_B = P = 1.$$

$$\sum M_D = 0,$$

$$-P \cdot 4 + R_C \cdot 5 = 0,$$

$$R_C = \frac{P \cdot 4}{5} = \frac{1 \cdot 4}{5} = 0,8 \text{ кН}.$$

$$\sum P_y = 0,$$

$$-R_A + R_C = 0,$$

$$R_A = R_C = 0,8 \text{ кН}.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах від дії горизонтальної одиничної сили (див. рис. 2.10, в):

$$M_1 = M_3 = M_5 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = -R_A \cdot 3 = -0,8 \cdot 3 = -2,4 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = R_C \cdot 2 = 0,8 \cdot 2 = 1,6 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = R_B \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії горизонтальної одиничної сили за характерними перерізами (див. рис. 2.10, в).

З використанням формули крайніх ординат «перемножуємо між собою» на кожній ділянці епюри згинальних моментів від дії заданого навантаження та від дії горизонтальної одиничної сили:

$$\begin{aligned} y_A = \Delta_{lp} &= \frac{3}{6EJ_x} (2 \cdot 43,2 \cdot 2,4) + \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 28,8 \cdot 1,6) + \frac{4}{6EJ_x} (2 \cdot 72 \cdot 4,0) + \\ &+ \frac{9 \cdot 4^3}{24EJ_x} (0 + 4,0) = \frac{614,4}{EJ_x}. \end{aligned}$$

Горизонтальне переміщення точки А дорівнює:

$$y_A = \frac{614,4 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 2000 \times 10^{-8}} = 0,154 \text{ м}.$$

Результат одержали зі знаком «+». Це вказує на те, що точка переміщається за напрямком одиничної сили, тобто вправо.

3 Визначаємо кут повороту перерізу В.

Для цього знімаємо зі стрижневої системи задане навантаження та у перерізі В прикладаємо одиничний момент.

Визначаємо опорні реакції від дії одиничного моменту (рис. 2.10, г):

$$R_B = 0,$$

$$R_A = R_C = \frac{M}{5} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах від дії одиничного моменту (див. рис. 2.10, г):

$$M_1 = M_3 = 0,$$

$$M_2 = -R_A \cdot 3 = -0,2 \cdot 3 = -0,6,$$

$$M_4 = R_C \cdot 2 = 0,2 \cdot 2 = 0,4,$$

$$M_5 = M_6 = M = 1.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту за характерними перерізами (див. рис. 2.10, г).

З використанням формули крайніх ординат «перемножуємо між собою» на кожній ділянці епюри згинальних моментів від дії заданого навантаження та від дії одиничного моменту:

$$\theta_B = \Delta_{2p} = \frac{3}{6EJ_x} (2 \cdot 43,2 \cdot 0,6) + \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 28,8 \cdot 0,4) + \frac{4}{6EJ_x} (2 \cdot 72 \cdot 1,0 + 72 \cdot 1,0) + \frac{9 \cdot 4^3}{24EJ_x} (1 + 1) = \frac{225,6}{EJ_x}.$$

Кут повороту перерізу В дорівнює:

$$\theta_B = \frac{225,6 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 2000 \times 10^{-8}} = 0,0564 \text{ рад}.$$

Результат одержали зі знаком «+». Це вказує на те, що переріз В повертається за напрямком годинникової стрілки.

3 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕ ВИЗНАЧУВАНИХ СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ

Статично не визначуваними називаються системи, силові фактори в яких тільки з рівнянь рівноваги твердого тіла визначити не можна. У таких системах більше в'язів, ніж необхідно для рівноваги. Таким чином, деякі в'язи виявляються «зайвими», а зусилля в них – «зайвими невідомими». За кількістю «зайвих зв'язків» або «зайвих невідомих зусиль» установлюють ступінь статичної невизначуваності системи.

Основними етапами розрахунку статично не визначуваних систем є наступні:

1 Установлюємо ступінь статичної невизначуваності системи, тобто кількість «зайвих в'язів» або «зайвих зусиль».

2 Видаляючи «зайві в'язи», заміняємо вихідну систему статично визначеною, котра називається основною системою (ОС).

3 Завантажуємо основну систему заданим навантаженням та «зай-
вими невідомими зусиллями», що замінюють дію вилучених зв'язків. Така
система називається еквівалентною системою (ЕС).

4 Для еквівалентності основної системи з вихідної невідомі зусилля повинні бути підібрані так, щоб деформація основної системи не відрізнялася від деформації вихідної статично не визначуваної.

Рівняння переміщень, що виражають дорівненість нулю переміщень за напрямками зайвих невідомих, зручно становити в канонічній формі. Канонічні рівняння переміщень для будь-якої n раз статично не визначуваної системи мають такий вигляд:

[illegible]

З отриманих у такий спосіб рівнянь визначають значення «зайвих невідомих».

5 Знайшовши «зайві невідомі зусилля», визначення реакцій опор і побудова епюр внутрішніх силових факторів, а також підбір перерізу та перевірку міцності робимо звичайними способами.

Зазначена схема розрахунку зветься методом сил, оскільки в якості основних невідомих тут вибирають зусилля «зайвих» зв'язків.

3.1 Розрахунок статично не визначуваних рам

Задача 3.1

Для рами, яка зображена на рисунку 3.1, необхідно:

- 1) розкрити статичну невизначуваність;
- 2) побудувати епюри поздовжніх і поперечних сил, а також згинальних моментів;
- 3) підібрати переріз у вигляді двотавра, якщо $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$;
- 4) визначити кут повороту перерізу K .

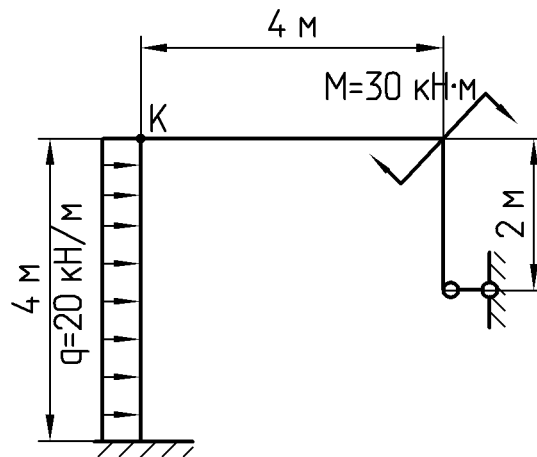


Рисунок 3.1

Розв'язання

1 Встановлюємо ступінь статичної невизначуваності системи. Якщо невідомих реакцій чотири, а рівнянь рівноваги можна скласти тільки три, то дана система один раз статично невизначувана.

2 Вибираємо основну систему, видаляючи «зайві зв'язки» і заміняючи вихідну систему на статично визначену (рис. 3.2, а).

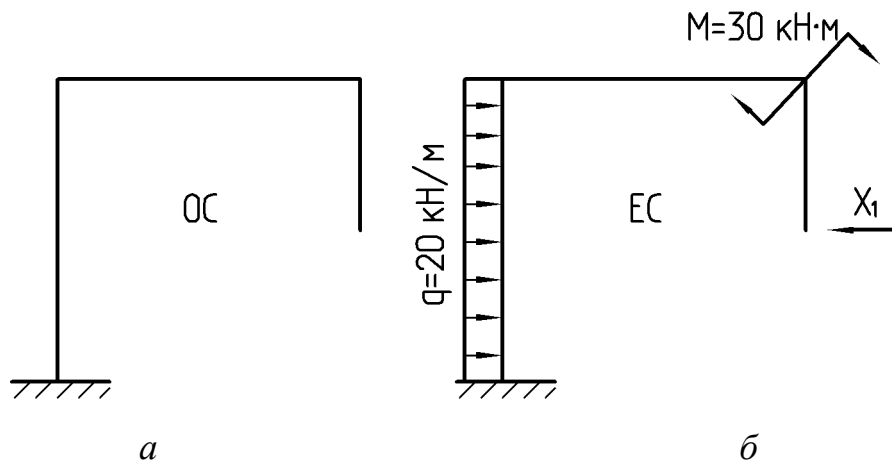


Рисунок 3.2

3 Одержуємо еквівалентну систему, завантажуючи основну систему заданим навантаженням та «зайвими невідомими зусиллями», що замінюють дію вилучених зв'язків (рис. 3.2, б).

4 Для того щоб визначити «зайве невідоме зусилля» X_1 , скористаємося канонічним рівнянням

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

5 Розглянемо основну систему, навантажену тільки заданим навантаженням. Будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження M_p .

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 3.3, а):

$$\begin{aligned} M_1 &= M_2 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M_3 &= M_4 = M_5 = -M = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M_6 &= -q \cdot 4 \cdot 2 - M = -20 \cdot 4 \cdot 2 - 30 = -190 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії заданого навантаження за характерними перерізами (рис. 3.3, б).

6 Розглянемо основну систему, навантажену тільки одиничною силою X_1 . Будуємо епюру згинальних моментів від одиничної сили \bar{M}_1 .

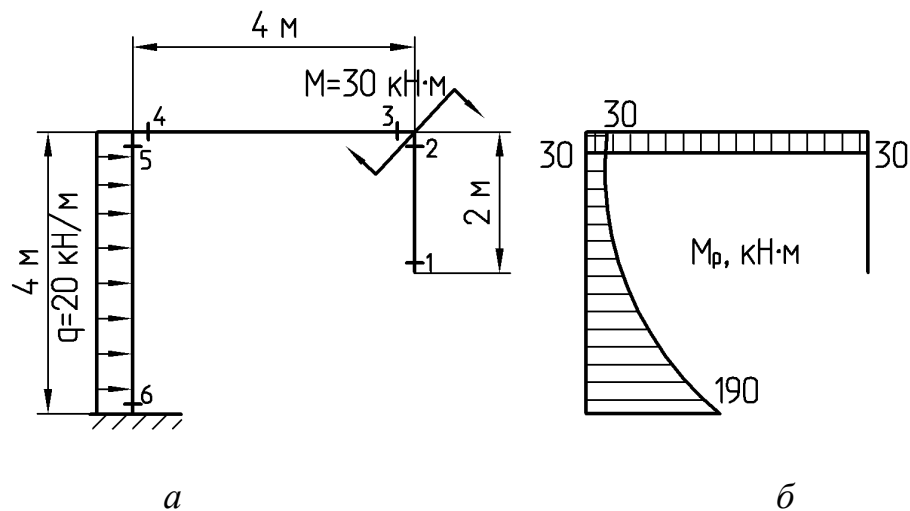


Рисунок 3.3

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 3.4):

$$\begin{aligned} M_1 &= 0 \text{ м}, \\ M_2 &= M_3 = M_4 = M_5 = -X_1 \cdot 2 = -1 \cdot 2 = -2 \text{ м}, \\ M_6 &= X_1 \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ м}. \end{aligned}$$

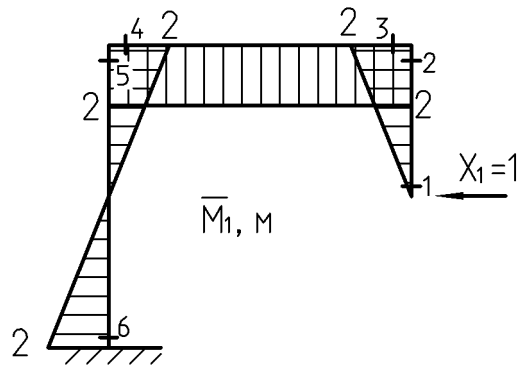


Рисунок 3.4

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничної сили за характерними перерізами (див. рис. 3.4).

7 Визначаємо коефіцієнти канонічного рівняння, перемножуючи відповідні епюри, використовуючи формулу крайніх ординат:

$$\delta_{11} = \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 2 \cdot 2) + \frac{4}{6EJ_x} (6 \cdot 2 \cdot 2) + \frac{4}{6EJ_x} (2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2) = \frac{24}{EJ_x},$$

$$\Delta_{1p} = \frac{4}{6EJ_x} (6 \cdot 30 \cdot 2) + \frac{4}{6EJ_x} (2 \cdot 30 \cdot 2 - 2 \cdot 190 \cdot 2 - 30 \cdot 2 + 190 \cdot 2) + \frac{20 \cdot 4^3}{24EJ_x} (-2 + 2) = \frac{26,7}{EJ_x}.$$

8 Розв'язуємо канонічне рівняння:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0,$$

$$\frac{24}{EJ_x} X_1 + \frac{26,7}{EJ_x} = 0,$$

$$24X_1 + 26,7 = 0,$$

$$X_1 = \frac{-26,7}{24} = -1,1 \text{ кН}.$$

9 Розглянемо еквівалентну систему, тобто статично визначувану основну систему, під дією заданого навантаження та знайденої сили $X_1 = 1,1 \text{ кН}$ (рис. 3.5, а), будуємо остаточні епюри внутрішніх силових факторів.

Обчислюємо значення поздовжніх сил у характерних перерізах:

$$N_1 = N_2 = 0 \text{ кН},$$

$$N_3 = N_4 = X_1 = 1,1 \text{ кН},$$

$$N_5 = N_6 = 0 \text{ кН}.$$

Обчислюємо значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$Q_1 = Q_2 = -X_1 = -1,1 \text{ кН},$$

$$Q_3 = Q_4 = 0 \text{ кН},$$

$$Q_5 = X_1 = 1,1 \text{ кН},$$

$$Q_6 = X_1 + q \cdot 4 = 1,1 + 20 \cdot 4 = 81,1 \text{ кН}.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах.

$$M_1 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = X_1 \cdot 2 = 1,1 \cdot 2 = 2,2 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_3 = M_4 = M_5 = -M + X_1 \cdot 2 = -30 + 1,1 \cdot 2 = -27,8 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = -q \cdot 4 \cdot 2 - M - X_1 \cdot 2 = -20 \cdot 4 \cdot 2 - 30 - 1,1 \cdot 2 = -192,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюри поздовжніх сил N (рис. 3.5, б), поперечних сил Q (рис. 3.5, в), а також згинальних моментів M_s (рис. 3.5, г) за характерними перерізами.

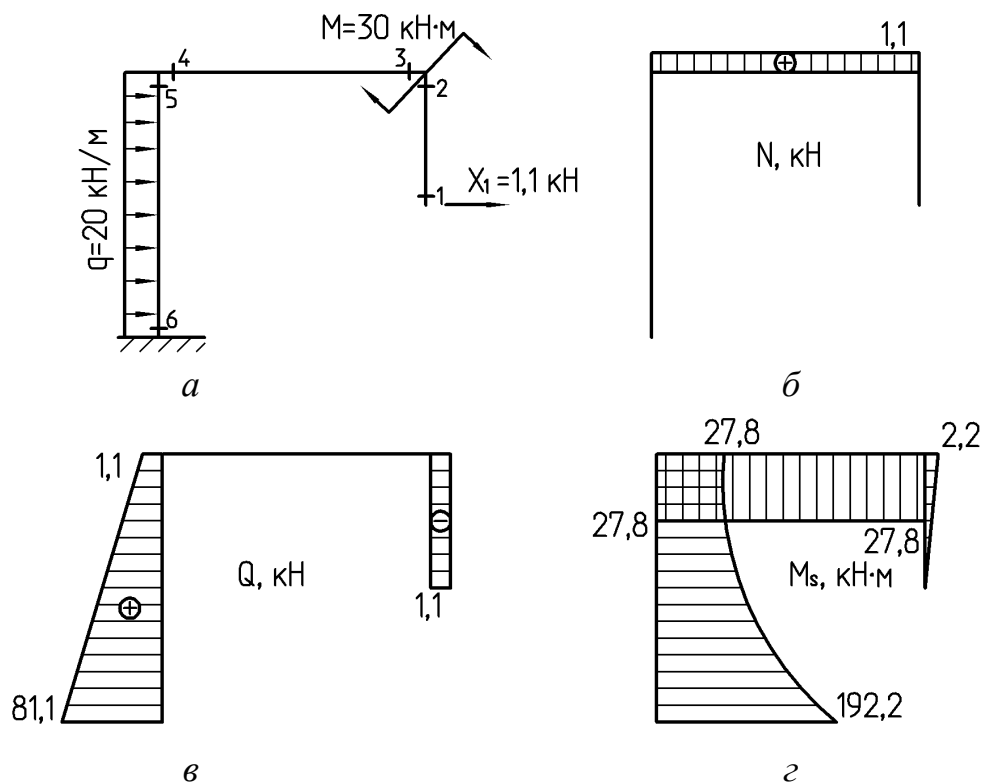


Рисунок 3.5

10 Виконуємо деформаційну перевірку. Якщо в заданій статично не визначуваній системі переміщення за напрямком X_1 дорівнює нулю, то добуток остаточної епюри згинальних моментів M_s на епюрі \overline{M}_1 має дорівнювати нулю, тобто $\Delta_{1s} = 0$:

$$\begin{aligned}\Delta_{1s} &= \frac{2}{6EJ_x}(-2 \cdot 2,2 \cdot 2) + \frac{4}{6EJ_x}(6 \cdot 27,8 \cdot 2) + \\ &+ \frac{4}{6EJ_x}(2 \cdot 27,8 \cdot 2 - 2 \cdot 192,2 \cdot 2 - 27,8 \cdot 2 + 192,2 \cdot 2) + \\ &+ \frac{20 \cdot 4^3}{24EJ_x}(-2 + 2) = \frac{-2,9 + 222,4 - 219,2}{EJ_x} = \frac{-222,1 + 222,4}{EJ_x}.\end{aligned}$$

При цьому похибка склала:

$$\frac{-222,1 + 222,4}{222,1} \cdot 100\% = 0,1\%.$$

11 Підбираємо поперечний переріз у вигляді двотавра.

При зазначеному навантаженні небезпечним перерізом є переріз 6, для якого $M_{\max} = M_6 = 192,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Розміри перерізу підбираємо з умови міцності на згинання:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Визначимо необхідний момент опору перерізу:

$$\begin{aligned}W_x &\geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}, \\ W_x &\geq \frac{192,2 \times 10^{-3}}{180} \times 10^6 = 1068 \text{ см}^3.\end{aligned}$$

Номер двотавра знаходимо за розрахунковим значенням моменту опору $W_x \geq 1068 \text{ см}^3$. За таблицею сортаменту (ДСТУ 8239-72) вибираємо двотавр № 45, для якого $W_x = 1231 \text{ см}^3$, $J_x = 27696 \text{ см}^4$.

12 Визначаємо кут повороту перерізу K .

Для цього до основної системи в перерізі K прикладаємо одиничний момент, тобто $M = 1$.

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах від дії одиничного моменту (рис. 3.6):

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = 0,$$

$$M_5 = M_6 = M = 1.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту за характерними перерізами (див. рис. 3.6).

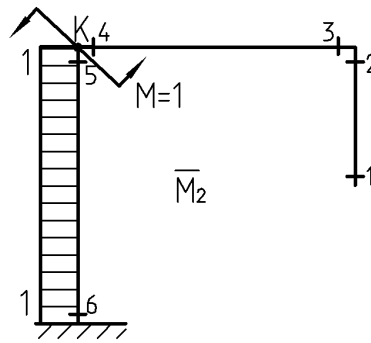


Рисунок 3.6

З використанням формули крайніх ординат «перемножуємо між собою» на кожній ділянці остаточну епюру згинальних моментів M_s та епюру від дії одиничного моменту \overline{M}_2 :

$$\theta_K = \Delta_{2s} = \frac{4}{6EJ_x} (-2 \cdot 27,8 \cdot 1 - 2 \cdot 192,2 \cdot 1 - 27,8 \cdot 1 - 192,2 \cdot 1) + \frac{20 \cdot 4^3}{24EJ_x} (1 + 1) = \frac{-333,3}{EJ_x}.$$

Кут повороту перерізу К дорівнює:

$$\theta_K = \frac{-333,3 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 27696 \times 10^{-8}} = -0,0060 \text{ рад.}$$

Результат одержали зі знаком «-». Це вказує на те, що переріз К повертається за напрямком годинникової стрілки.

Допустимий кут повороту перерізу дорівнює:

$$[\theta] = 2^\circ = 0,0349 \text{ рад.}$$

Якщо кут повороту перерізу К менше, ніж допустимий кут повороту, то жорсткість рами забезпечена.

Задача 3.2

Для рами, яка подана на рисунку 3.7, необхідно:

- 1) розкрити статичну невизначуваність;
- 2) побудувати епюри поздовжніх і поперечних сил, а також згинальних моментів;
- 3) підібрати переріз у вигляді двотавра, якщо $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$;
- 4) визначити кут повороту перерізу K .

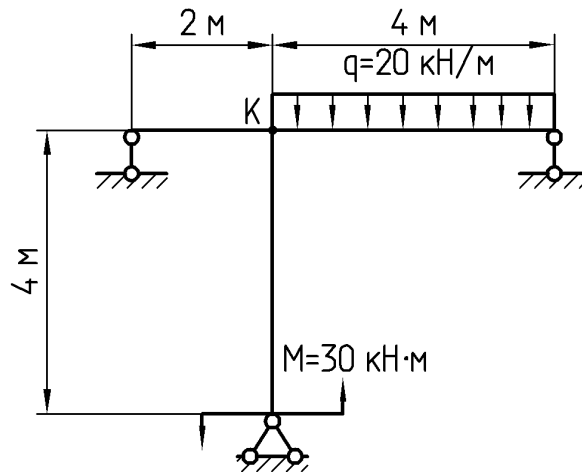


Рисунок 3.7

Розв'язання

1 Встановлюємо ступінь статичної невизначуваності системи. Дана система один раз статично не визначувана.

2 Вибираємо основну систему, видаляючи «зайві зв'язки» і заміняючи вихідну систему статично визначеною (рис. 3.8, а).

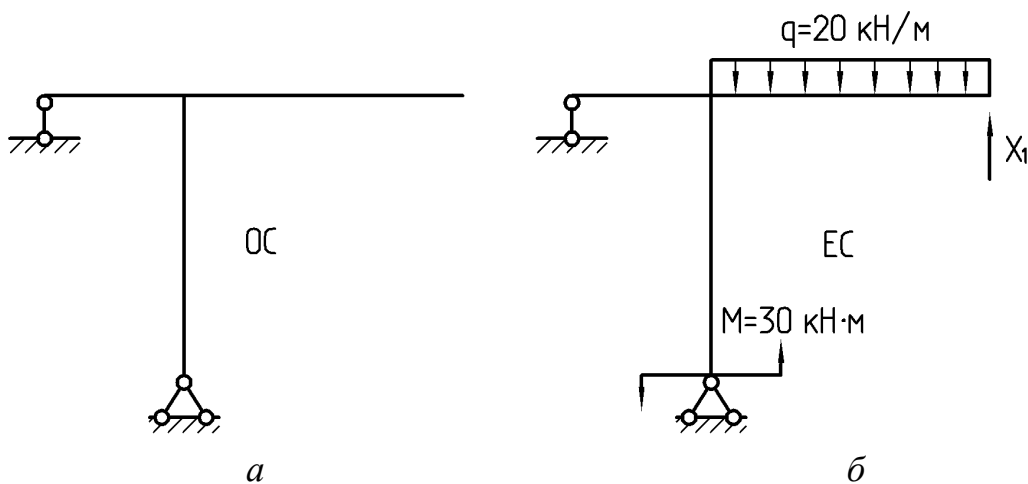


Рисунок 3.8

3 Одержуємо еквівалентну систему, завантажуючи основну систему заданим навантаженням та «зайвими невідомими зусиллями», що замінюють дію вилучених зв'язків (рис. 3.8, б).

4 Для того щоб визначити «зайве невідоме зусилля» X_1 , скористаємося канонічним рівнянням

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

5 Розглянемо основну систему, навантажену тільки заданим навантаженням.

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження (рис. 3.9, а):

$$\sum P_z = 0,$$

$$H_A = 0.$$

$$\sum M_A = 0,$$

$$M - q \cdot 4 \cdot 2 - R_B \cdot 2 = 0,$$

$$R_B = \frac{M - q \cdot 4 \cdot 2}{2} = \frac{30 - 20 \cdot 4 \cdot 2}{2} = -65 \text{ кН}.$$

$$\sum P_y = 0,$$

$$-q \cdot 4 + R_A + R_B = 0,$$

$$R_A = q \cdot 4 - R_B = 20 \cdot 4 + 65 = 145 \text{ кН}.$$

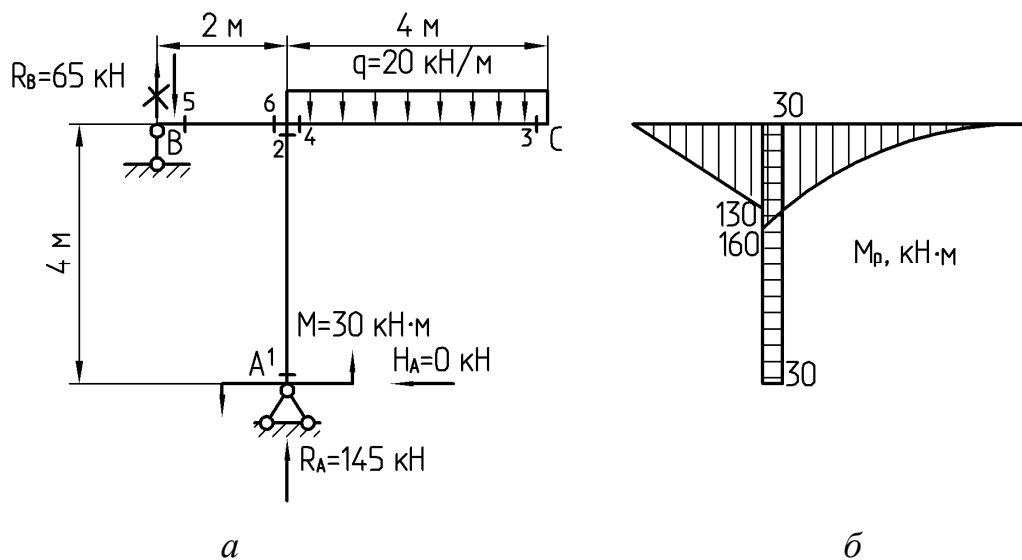


Рисунок 3.9

Для перевірки використаємо рівняння $\sum M_C = 0$:

$$M + q \cdot 4 \cdot 2 - R_A \cdot 4 - R_B \cdot 6 = 0,$$

$$30 + 20 \cdot 4 \cdot 2 - 145 \cdot 4 + 65 \cdot 6 = 0,$$

$$580 - 580 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження M_p , обчислюючи значення згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 3.9, б):

$$M_1 = M_2 = M = 30 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_3 = M_5 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = -q \cdot 4 \cdot 2 = -20 \cdot 4 \cdot 2 = -160 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = -R_B \cdot 2 = -65 \cdot 2 = -130 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії заданого навантаження за характерними перерізами (рис. 3.9, б).

6 Розглянемо основну систему, навантажену тільки одиничною силою X_1 .

Визначаємо опорні реакції від дії одиничної сили (рис. 3.9, а):

$$\sum P_z = 0,$$

$$H_A = 0.$$

$$\sum M_A = 0,$$

$$X_1 \cdot 4 - R_B \cdot 2 = 0,$$

$$R_B = \frac{X_1 \cdot 4}{2} = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2.$$

$$\sum P_y = 0,$$

$$X_1 + R_A + R_B = 0,$$

$$R_A = -R_B - X_1 = -2 - 1 = -3.$$

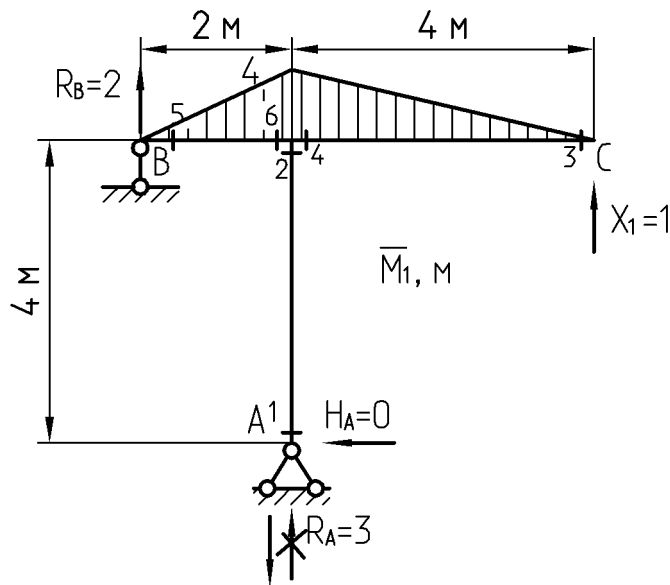


Рисунок 3.10

Для перевірки використаємо рівняння $\sum M_C = 0$:

$$-R_A \cdot 4 - R_B \cdot 6 = 0,$$

$$3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0,$$

$$12 - 12 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від одиничної сили \overline{M}_1 , обчислюючи значення згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 3.10):

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_5 = 0 \text{ м},$$

$$M_4 = X_1 \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4 \text{ м},$$

$$M_6 = R_B \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного фактора за характерними перерізами (рис. 3.10).

7 Визначаємо коефіцієнти канонічного рівняння, перемножуючи відповідні епюри, використовуючи формулу крайніх ординат:

$$\delta_{11} = \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 4 \cdot 4) + \frac{4}{6EJ_x} (2 \cdot 4 \cdot 4) = \frac{32}{EJ_x},$$

$$\Delta_{1p} = \frac{2}{6EJ_x} (-2 \cdot 130 \cdot 4) + \frac{4}{6EJ_x} (-2 \cdot 160 \cdot 4) + \frac{20 \cdot 4^3}{24EJ_x} (4 + 0) = \frac{-986,7}{EJ_x}.$$

8 Розв'язуємо канонічне рівняння:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0,$$

$$\frac{32}{EJ_x}X_1 - \frac{986,7}{EJ_x} = 0,$$

$$32X_1 - 986,7 = 0,$$

$$X_1 = \frac{986,7}{32} = 30,8 \text{ кН}.$$

9 Розглянемо еквівалентну систему, тобто статично визначувану основну систему, під дією заданого навантаження та знайденої сили $X_1 = 30,8 \text{ кН}$ (рис. 3.11, а), будуємо остаточні епюри внутрішніх силових факторів.

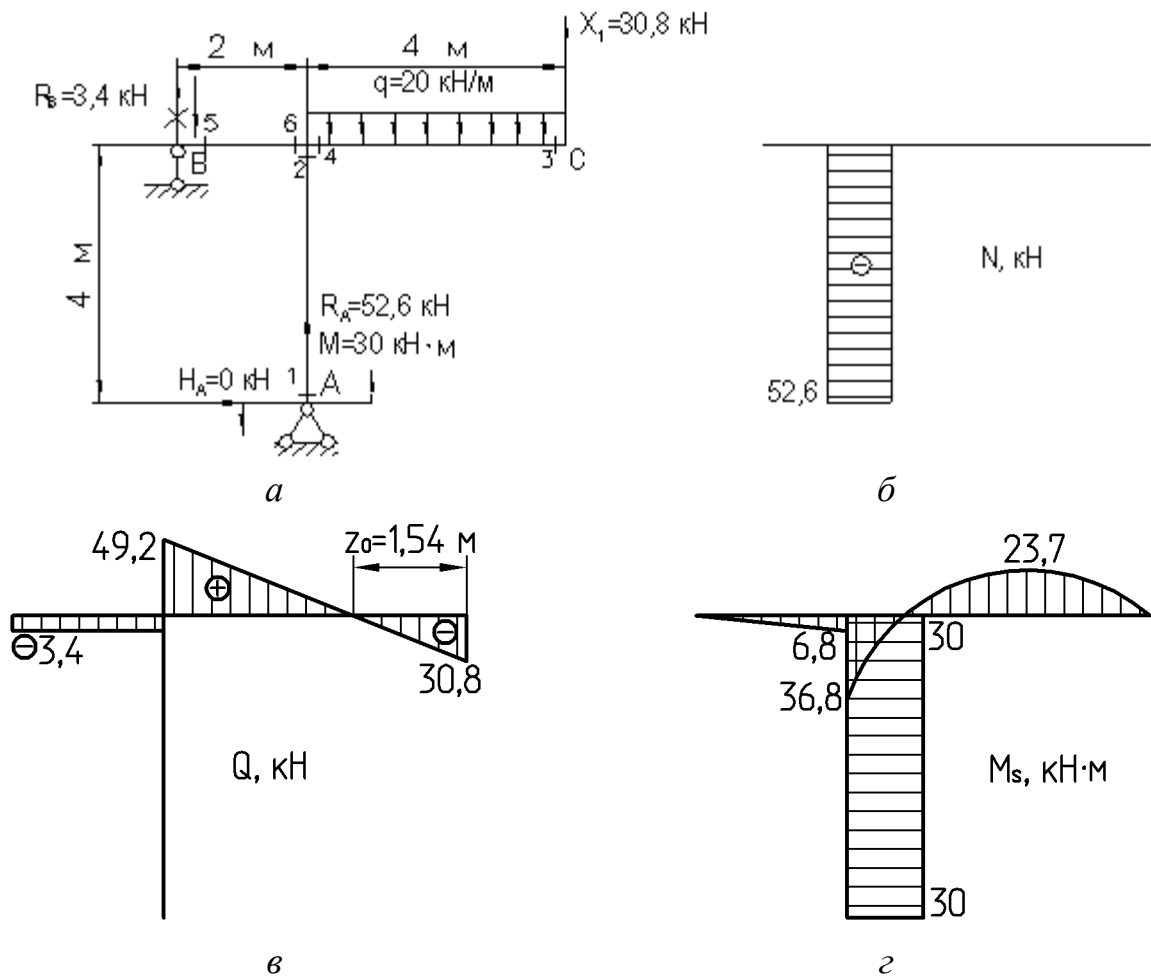


Рисунок 3.11

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження та сили $X_1 = 30,8 \text{ кН}$ (див. рис. 3.11, а):

$$\sum P_z = 0,$$

$$H_A = 0.$$

$$\sum M_A = 0,$$

$$M - q \cdot 4 \cdot 2 + X_1 \cdot 4 - R_B \cdot 2 = 0,$$

$$R_B = \frac{M - q \cdot 4 \cdot 2 + X_1 \cdot 4}{2} = \frac{30 - 20 \cdot 4 \cdot 2 + 30,8 \cdot 4}{2} = -3,4 \text{ кН}.$$

$$\sum P_y = 0,$$

$$-q \cdot 4 + X_1 + R_A + R_B = 0,$$

$$R_A = q \cdot 4 - X_1 - R_B = 20 \cdot 4 - 30,8 + 3,4 = 52,6 \text{ кН}.$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum M_C = 0$:

$$M + q \cdot 4 \cdot 2 - R_A \cdot 4 - R_B \cdot 6 = 0,$$

$$30 + 20 \cdot 4 \cdot 2 - 52,6 \cdot 4 + 3,4 \cdot 6 = 0,$$

$$210,4 - 210,4 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Обчислюємо значення поздовжніх сил у характерних перерізах:

$$N_1 = N_2 = -R_A = -52,6 \text{ кН},$$

$$N_3 = N_4 = 0 \text{ кН},$$

$$N_5 = N_6 = 0 \text{ кН}.$$

Обчислюємо значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$Q_1 = Q_2 = 0 \text{ кН},$$

$$Q_3 = -X_1 = -30,8 \text{ кН},$$

$$Q_4 = -X_1 + q \cdot 4 = -30,8 + 20 \cdot 4 = 49,2 \text{ кН},$$

$$Q_5 = Q_6 = R_B = -3,4 \text{ кН}.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$M_1 = M_2 = M = 30 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_3 = M_5 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = X_1 \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 = 30,8 \cdot 4 - 20 \cdot 4 \cdot 2 = -36,8 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = -R_B \cdot 2 = -3,4 \cdot 2 = -6,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюри поздовжніх сил N (рис. 3.11, б), поперечних сил Q (рис. 3.11, в), а також згинальних моментів M_s (рис. 3.11, г) за характерними перерізами.

Якщо епюра поперечних сил пересікає базову лінію та змінює знак з «+» на «-», то в цій точці маємо максимальне значення згинального моменту. Знаходимо положення цього перерізу:

$$z_0 = \frac{30,8}{20} = 1,54 \text{ м},$$

$$M_{z_0} = X_1 z_0 - q z_0 \frac{z_0}{2} = 30,8 \cdot 1,54 - 20 \cdot 1,54 \cdot \frac{1,54}{2} = 23,7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

10 Виконуємо деформаційну перевірку. Якщо в заданій статично не визначуваній системі переміщення за напрямком X_1 дорівнює нулю, то добуток остаточної епюри згинальних моментів M_s на епюрі \overline{M}_1 має дорівнювати нулю, тобто $\Delta_{1s} = 0$:

$$\begin{aligned} \Delta_{1s} &= \frac{2}{6EJ_x} (-2 \cdot 6,8 \cdot 4) + \frac{4}{6EJ_x} (-2 \cdot 36,8 \cdot 4) + \frac{20 \cdot 4^3}{24EJ_x} (4 + 0) = \\ &= \frac{-17,6 - 195,7 + 213,3}{EJ_x} = \frac{-213,3 + 213,3}{EJ_x} = 0. \end{aligned}$$

11 Підбираємо поперечний переріз у вигляді двотавра.

При зазначеному навантаженні небезпечним перерізом є переріз 4, для якого $M_{\max} = M_4 = 36,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Якщо осьова сила незначна, то розміри перерізу підбираємо з умови міцності на згинання:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Визначимо необхідний момент опору перерізу:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]},$$

$$W_x \geq \frac{36,8 \times 10^{-3}}{180} \times 10^6 = 204,4 \text{ см}^3.$$

Номер двотавра знаходимо за розрахунковим значенням моменту опору $W_x \geq 204,4 \text{ см}^3$. За таблицею сортаменту (ДСТУ 8239-72) вибираємо двотавр № 22, для якого $W_x = 232 \text{ см}^3$, $J_x = 2550 \text{ см}^4$.

12 Визначаємо кут повороту перерізу К.

Для цього до основної системи в перерізі К прикладаємо одиничний момент, тобто $M = 1$.

Визначаємо опорні реакції від дії одиничного моменту (рис. 3.12):

$$H_A = 0,$$

$$R_A = R_B = \frac{M}{2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах від дії одиничного моменту (див. рис. 3.12):

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = 0,$$

$$M_6 = -R_B \cdot 2 = -1.$$

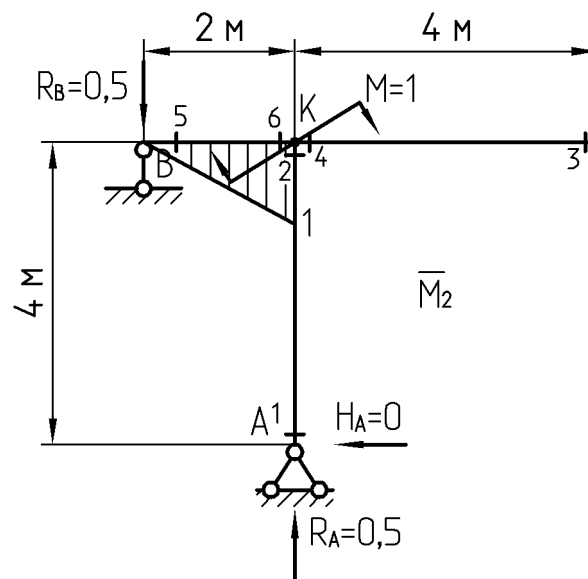


Рисунок 3.12

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту за характерними перерізами (див. рис. 3.12).

З використанням формули крайніх ординат «перемножуємо між собою» на кожній ділянці остаточну епюру згинальних моментів M_s та епюру від дії одиничного моменту \overline{M}_2 :

$$\theta_K = \Delta_{2s} = \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 6,8 \cdot 1) = \frac{4,53}{EJ_x}.$$

Кут повороту перерізу К дорівнює:

$$\theta_K = \frac{4,53 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 2550 \times 10^{-8}} = 0,00085 \text{ рад.}$$

Допустимий кут повороту перерізу дорівнює:

$$[\theta] = 2^\circ = 0,0349 \text{ рад.}$$

Якщо кут повороту перерізу К менше, ніж допустимий кут повороту, то жорсткість рами забезпечена.

Задача 3.3

Для рами, яка зображена на рисунку 3.13, необхідно:

- 1) розкрити статичну невизначуваність;
- 2) побудувати епюри поздовжніх і поперечних сил, а також згинальних моментів;
- 3) підібрати переріз у вигляді двотавра, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$;
- 4) визначити кут повороту перерізу К.

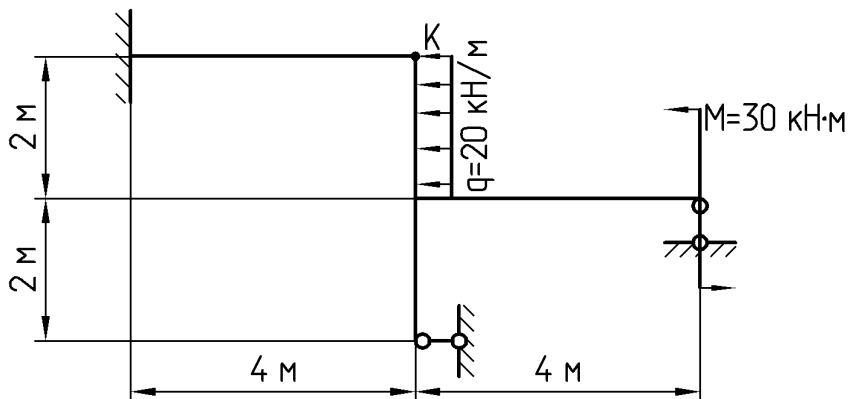


Рисунок 3.13

Розв'язання

1 Встановлюємо ступінь статичної невизначуваності системи. Якщо невідомих реакцій п'ять, а рівнянь рівноваги можна скласти тільки три, то дана система два рази статично не визначувана.

2 Вибираємо основну систему, видаляючи «зайві зв'язки» і замінюючи вихідну систему статично визначуваною (рис. 3.14, а).

3 Одержуємо еквівалентну систему, завантажуючи основну систему заданим навантаженням та «зайвими невідомими зусиллями», що замінюють дію вилучених зв'язків (рис. 3.14, б).

4 Для того щоб визначити «зайві невідомі зусилля» X_1 та X_2 , скористаємося системою канонічних рівнянь:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases}$$

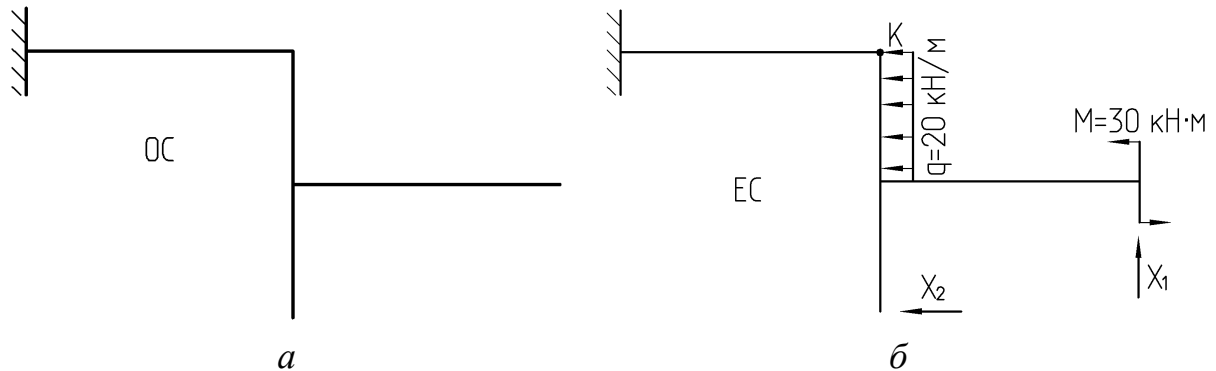


Рисунок 3.14

5 Розглянемо основну систему, навантажену тільки заданим навантаженням. Будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження M_p .

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 3.15, а):

$$M_1 = M_2 = M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_3 = M_4 = 0 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_5 = M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_6 = M_7 = M_8 = M - q \cdot 2 \cdot 1 = 30 - 20 \cdot 2 \cdot 1 = -10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

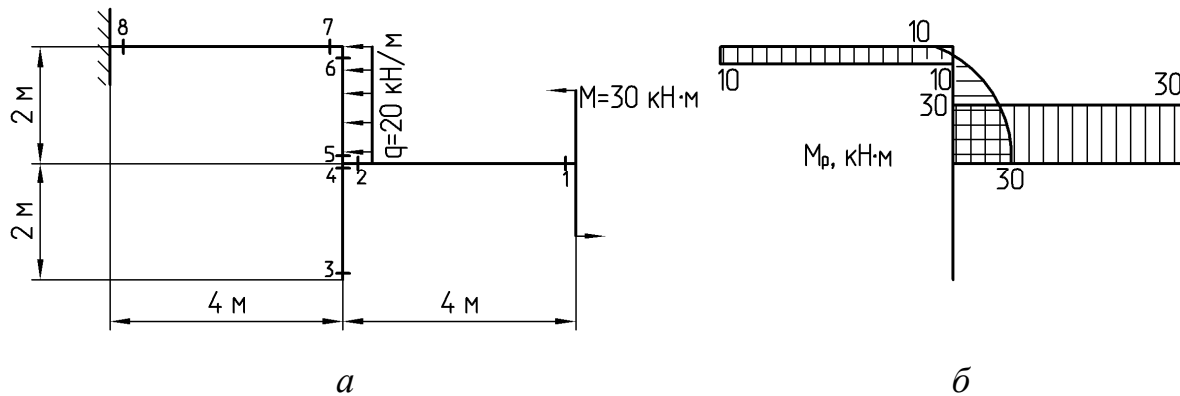


Рисунок 3.15

Будуємо епюру згинальних моментів від дії заданого навантаження за характерними перерізами (рис. 3.15, б).

6 Розглянемо основну систему, навантажену тільки одиничною силою X_1 . Будуємо епюру згинальних моментів від одиничної сили \bar{M}_1 .

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 3.16, а):

$$M_1 = 0 \text{ м},$$

$$M_2 = X_1 \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4 \text{ м},$$

$$M_3 = M_4 = 0 \text{ м},$$

$$M_5 = M_6 = M_7 = X_1 \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4 \text{ м},$$

$$M_8 = X_1 \cdot 8 = 1 \cdot 8 = 8 \text{ м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничної сили X_1 за характерними перерізами (див. рис. 3.16, а).

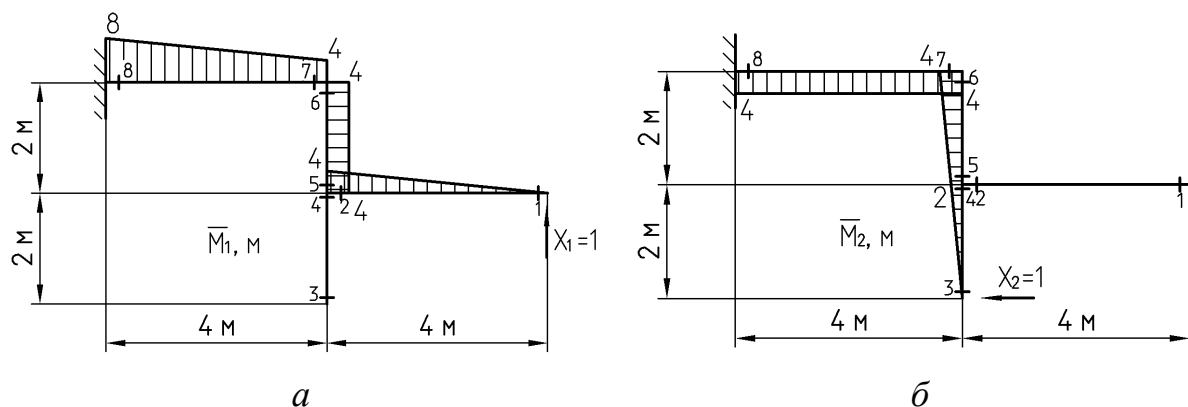


Рисунок 3.16

7 Розглянемо основну систему, навантажену тільки одиничною силою X_2 . Будуємо епюру згинальних моментів від одиничної сили $\overline{M_2}$.

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 3.16, б):

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0 \text{ м},$$

$$M_4 = M_5 = -X_2 \cdot 2 = -1 \cdot 2 = -2 \text{ м},$$

$$M_6 = M_7 = M_8 = -X_2 \cdot 4 = -1 \cdot 4 = -4 \text{ м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничної сили X_2 за характерними перерізами (див. рис. 3.16, б).

8 Визначаємо коефіцієнти канонічних рівнянь, перемножуючи відповідні епюри, використовуючи формулу крайніх ординат:

$$\delta_{11} = \frac{4}{6EJ_x}(2 \cdot 4 \cdot 4) + \frac{2}{6EJ_x}(6 \cdot 4 \cdot 4) + \frac{4}{6EJ_x}(2 \cdot 8 \cdot 8 + 2 \cdot 4 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 4 \cdot 8) = \frac{202,7}{EJ_x},$$

$$\delta_{22} = \frac{4}{6EJ_x}(2 \cdot 4 \cdot 4) + \frac{4}{6EJ_x}(6 \cdot 4 \cdot 4) = \frac{85,3}{EJ_x},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2}{6EJ_x}(-2 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 4 \cdot 4) +$$

$$+ \frac{4}{6EJ_x}(-2 \cdot 8 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 4 - 8 \cdot 4 - 4 \cdot 4) = \frac{-120,0}{EJ_x},$$

$$\Delta_{1p} = \frac{4}{6EJ_x}(2 \cdot 30 \cdot 4 + 30 \cdot 4) + \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 30 \cdot 4 - 2 \cdot 10 \cdot 4 + 30 \cdot 4 - 10 \cdot 4) +$$

$$+ \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x}(4 + 4) + \frac{4}{6EJ_x}(-2 \cdot 10 \cdot 8 - 2 \cdot 10 \cdot 4 - 10 \cdot 4 - 10 \cdot 8) = \frac{133,3}{EJ_x},$$

$$\Delta_{2p} = \frac{2}{6EJ_x}(-2 \cdot 30 \cdot 2 + 2 \cdot 10 \cdot 4 - 30 \cdot 4 + 10 \cdot 2) + \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x}(-2 - 4) +$$

$$+ \frac{4}{6EJ_x}(6 \cdot 10 \cdot 4) = \frac{73,3}{EJ_x}.$$

9 Перевіряємо правильність визначення коефіцієнтів канонічних рівнянь. Розглянемо основну систему, навантажену тільки одиничними силами X_1 та X_2 . Будуємо епюру згинальних моментів від одиничних сил $\overline{M_1} + \overline{M_2}$.

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 3.17):

$$\begin{aligned}M_1 &= 0 \text{ м}, \\M_2 &= X_1 \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4 \text{ м}, \\M_3 &= 0 \text{ м}, \\M_4 &= -X_2 \cdot 2 = -1 \cdot 2 = -2 \text{ м}, \\M_5 &= X_1 \cdot 4 - X_2 \cdot 2 = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 2 \text{ м}, \\M_6 &= M_7 = X_1 \cdot 4 - X_2 \cdot 4 = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 4 = 0 \text{ м}, \\M_8 &= M_7 = X_1 \cdot 8 - X_2 \cdot 4 = 1 \cdot 8 - 1 \cdot 4 = 4 \text{ м}.\end{aligned}$$

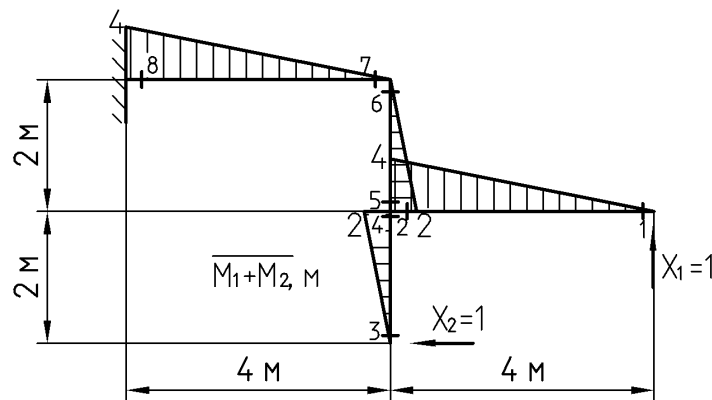


Рисунок 3.17

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничних сил X_1 і X_2 за характерними перерізами (див. рис. 3.17).

Виконуємо перевірку правильності визначення коефіцієнтів δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} і δ_{22} :

$$\begin{aligned}\delta_{(1+2)(1+2)} &= \frac{4}{6EJ_x} (2 \cdot 4 \cdot 4) + \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 2 \cdot 2) + \\&+ \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 2 \cdot 2) + \frac{4}{6EJ_x} (2 \cdot 4 \cdot 4) = \frac{48,0}{EJ_x}, \\ \delta_{(1+2)(1+2)} &= \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{202,7}{EJ_x} - \frac{120,0}{EJ_x} - \frac{120,0}{EJ_x} + \frac{85,3}{EJ_x} = \frac{48,0}{EJ_x}.\end{aligned}$$

Отже, коефіцієнти δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} і δ_{22} визначені вірно.

Виконуємо перевірку правильності визначення коефіцієнтів Δ_{1p} та Δ_{2p} :

$$\Delta_{(1+2)p} = \frac{4}{6EJ_x}(2 \cdot 30 \cdot 4 + 30 \cdot 4) + \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 30 \cdot 2 - 10 \cdot 2) +$$

$$+ \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x}(0 + 2) + \frac{4}{6EJ_x}(-2 \cdot 10 \cdot 4 - 10 \cdot 4) = \frac{206,7}{EJ_x},$$

$$\Delta_{(1+2)p} = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} = \frac{133,3}{EJ_x} + \frac{73,3}{EJ_x} = \frac{206,7}{EJ_x}.$$

Отже, коефіцієнти Δ_{1p} та Δ_{2p} визначені вірно.

10 Розв'язуємо систему канонічних рівнянь:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{202,7}{EJ_x}X_1 - \frac{120,0}{EJ_x}X_2 + \frac{133,3}{EJ_x} = 0, \\ -\frac{120,0}{EJ_x}X_1 + \frac{85,3}{EJ_x}X_2 + \frac{73,3}{EJ_x} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 202,7X_1 - 120,0X_2 + 133,3 = 0, \\ -120,0X_1 + 85,3X_2 + 73,3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = \frac{120,0X_2 - 133,3}{202,7}, \\ -120,0X_1 + 85,3X_2 + 73,3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = 0,59X_2 - 0,66, \\ -120,0 \cdot (0,59X_2 - 0,66) + 85,3X_2 + 73,3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = 0,59X_2 - 0,66, \\ -71,04X_2 + 78,91 + 85,3X_2 + 73,3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = 0,59X_2 - 0,66, \\ 14,29X_2 + 152,21 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = 0,59X_2 - 0,66, \\ X_2 = -10,66 \text{ кН}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = -7,0 \text{ кН}, \\ X_2 = -10,7 \text{ кН}. \end{cases}$$

11 Розглянемо еквівалентну систему, тобто статично визначувану основну систему, під дією заданого навантаження та знайдених сил $X_1 = 7,0 \text{ кН}$ та $X_2 = 10,7 \text{ кН}$ (рис. 3.18, а), будуюмо остаточні епюри внутрішніх силових факторів.

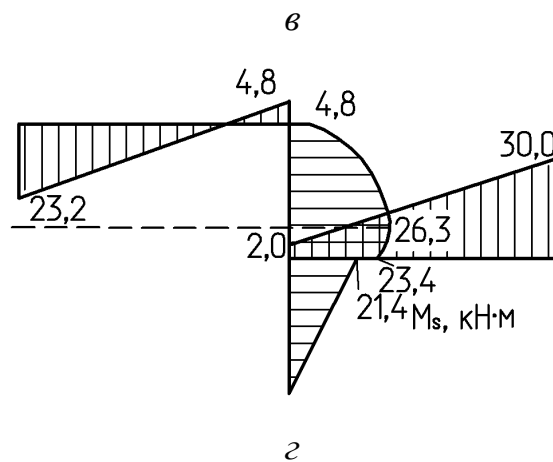
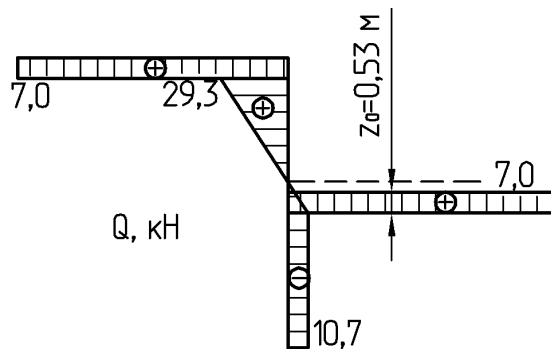
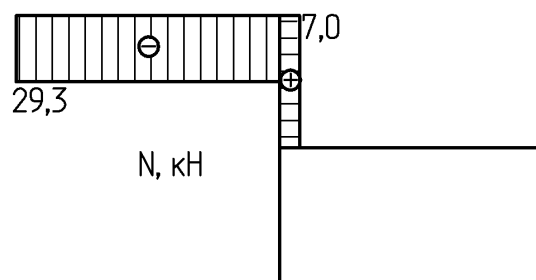
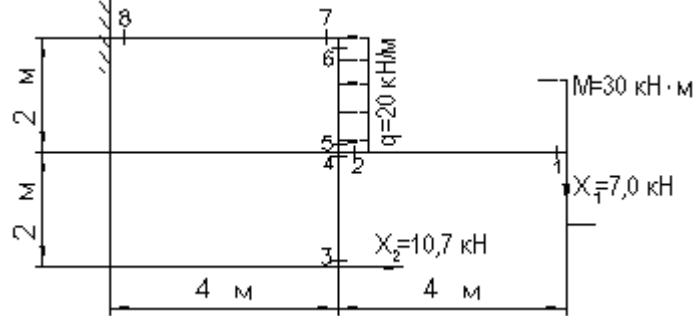


Рисунок 3.18

Обчислюємо значення поздовжніх сил у характерних перерізах:

$$N_1 = N_2 = 0 \text{ кН},$$

$$N_3 = N_4 = 0 \text{ кН},$$

$$N_5 = N_6 = X_1 = 7,0 \text{ кН},$$

$$N_7 = N_8 = X_2 - q \cdot 2 = 10,7 - 20 \cdot 2 = -29,3 \text{ кН}.$$

Обчислюємо значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$Q_1 = Q_2 = X_1 = 7,0 \text{ кН},$$

$$Q_3 = Q_4 = Q_5 = -X_2 = -10,7 \text{ кН},$$

$$Q_6 = -X_2 + q \cdot 2 = -10,7 + 20 \cdot 2 = 29,3 \text{ кН},$$

$$Q_7 = Q_8 = X_1 = 7,0 \text{ кН}.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$M_1 = M = 30 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M - X_1 \cdot 4 = 30 - 7 \cdot 4 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_3 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = X_2 \cdot 2 = 10,7 \cdot 2 = 21,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_5 = M - X_1 \cdot 4 + X_2 \cdot 2 = 30 - 7 \cdot 4 + 10,7 \cdot 2 = 23,4 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = M_7 = M - q \cdot 2 \cdot 1 - X_1 \cdot 4 + X_2 \cdot 4 = 30 - 20 \cdot 2 \cdot 1 - 7 \cdot 4 + 10,7 \cdot 4 = 4,8 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_8 = M - q \cdot 2 \cdot 1 - X_1 \cdot 8 + X_2 \cdot 4 = 30 - 20 \cdot 2 \cdot 1 - 7 \cdot 8 + 10,7 \cdot 4 = -23,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Якщо епюра поперечних сил пересікає базову лінію та змінює знак з «+» на «-», то в цій точці маємо максимальне значення згинального моменту. Знаходимо положення цього перерізу:

$$z_0 = \frac{10,7}{20} = 0,53 \text{ м},$$

$$\begin{aligned} M_{z_0} &= M - qz_0 \frac{z_0}{2} - X_1 \cdot 4 + X_2(2 + z_0) = \\ &= 30 - 20 \cdot 0,53 \cdot \frac{0,53}{2} - 7,0 \cdot 4 + 10,7 \cdot (2 + 0,53) = 26,3 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Будуємо епюри поздовжніх сил N (рис. 3.18, б), поперечних сил Q (рис. 3.18, в), а також згинальних моментів M_s (рис. 3.18, г) за характерними перерізами.

12 Виконуємо деформаційну перевірку.

Якщо в заданій статично не визначуваній системі переміщення за напрямком X_1 дорівнює нулю, то добуток остаточної епюри згинальних моментів M_s на епюрі \overline{M}_1 має дорівнювати нулю, тобто $\Delta_{1s} = 0$:

$$\begin{aligned}\Delta_{1s} &= \frac{4}{6EJ_x}(2 \cdot 2 \cdot 4 + 30 \cdot 4) + \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 23,4 \cdot 4 + 2 \cdot 4,8 \cdot 4 + 23,4 \cdot 4 + 4,8 \cdot 4) + \\ &+ \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x}(4 + 4) + \frac{4}{6EJ_x}(-2 \cdot 23,2 \cdot 8 + 2 \cdot 4,8 \cdot 4 - 23,2 \cdot 4 + 4,8 \cdot 8) = \\ &= \frac{90,7 + 112,8 + 53,3 - 258,1}{EJ_x} = \frac{256,8 - 258,1}{EJ_x}.\end{aligned}$$

При цьому похибка становила:

$$\frac{256,8 - 258,1}{256,8} \cdot 100\% = 0,5\%.$$

Якщо в заданій статично не визначуваній системі переміщення за напрямком X_2 дорівнює нулю, то добуток остаточної епюри згинальних моментів M_s на епюрі \overline{M}_2 має дорівнювати нулю, тобто $\Delta_{2s} = 0$:

$$\begin{aligned}\Delta_{2s} &= \frac{2}{6EJ_x}(-2 \cdot 21,4 \cdot 2) + \frac{2}{6EJ_x}(-2 \cdot 23,4 \cdot 2 - 2 \cdot 4,8 \cdot 4 - 23,4 \cdot 4 - 4,8 \cdot 2) + \\ &+ \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x}(-2 - 4) + \frac{4}{6EJ_x}(2 \cdot 23,2 \cdot 4 - 2 \cdot 4,8 \cdot 4 + 23,2 \cdot 4 - 4,8 \cdot 4) = \\ &= \frac{-28,5 - 78,4 - 40 + 147,7}{EJ_x} = \frac{-146,9 + 147,7}{EJ_x}.\end{aligned}$$

При цьому похибка становила:

$$\frac{147,7 - 146,9}{146,9} \cdot 100\% = 0,5\%.$$

13 Підбираємо поперечний переріз у вигляді двотавра.

При зазначеному навантаженні небезпечним перерізом є переріз 1, для якого $M_{\max} = M_1 = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Якщо осьова сила незначна, то розміри перерізу підбираємо з умови міцності на згинання:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Визначимо необхідний момент опору перерізу:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]},$$

$$W_x \geq \frac{30 \times 10^{-3}}{160} \times 10^6 = 187,5 \text{ см}^3.$$

Номер двотавра знаходимо за розрахунковим значенням моменту опору $W_x \geq 187,5 \text{ см}^3$. За таблицею сортаменту (ДСТУ 8239-72) вибираємо двотавр № 20а, для якого $W_x = 203 \text{ см}^3$, $J_x = 2030 \text{ см}^4$.

14 Визначаємо кут повороту перерізу К.

Для цього до основної системи в перерізі К прикладаємо одиничний момент, тобто $M = 1$.

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах від дії одиничного моменту (рис. 3.19):

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = M_6 = 0,$$

$$M_7 = M_8 = -M = -1.$$

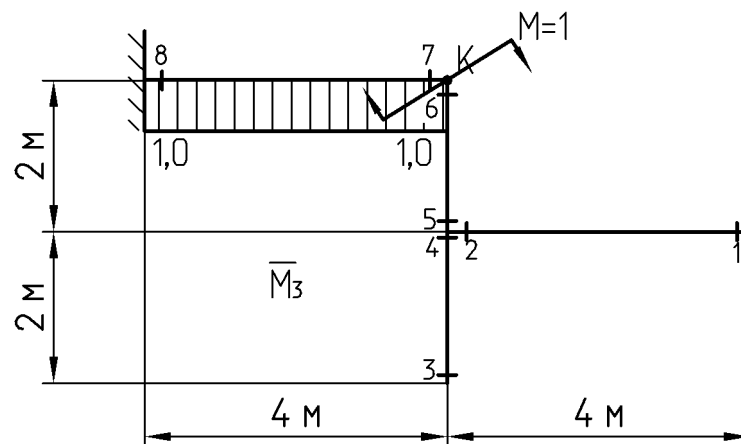


Рисунок 3.19

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту за характерними перерізами (див. рис. 3.19).

З використанням формули крайніх ординат «перемножуємо між собою» на кожній ділянці остаточну епюру згинальних моментів M_s та епюру від дії одиничного моменту \overline{M}_3 :

$$\theta_K = \Delta_{3s} = \frac{4}{6EJ_x} (2 \cdot 23,2 \cdot 1 - 2 \cdot 4,8 \cdot 1 + 23,2 \cdot 1 - 4,8 \cdot 1) = \frac{36,7}{EJ_x}.$$

Кут повороту перерізу К дорівнює:

$$\theta_K = \frac{36,7 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 2030 \times 10^{-8}} = 0,0090 \text{ рад.}$$

Допустимий кут повороту перерізу дорівнює:

$$[\theta] = 2^\circ = 0,0349 \text{ рад.}$$

Якщо кут повороту перерізу К менше, ніж допустимий кут повороту, то жорсткість рами забезпечена.

Задача 3.4

Для рами, яка зображена на рисунку 3.20, необхідно:

- 1) розкрити статичну невизначуваність;
- 2) побудувати епюри поздовжніх і поперечних сил, а також згинальних моментів;
- 3) підібрати переріз у вигляді двотавра, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$;
- 4) визначити кут повороту перерізу К.
- 5)

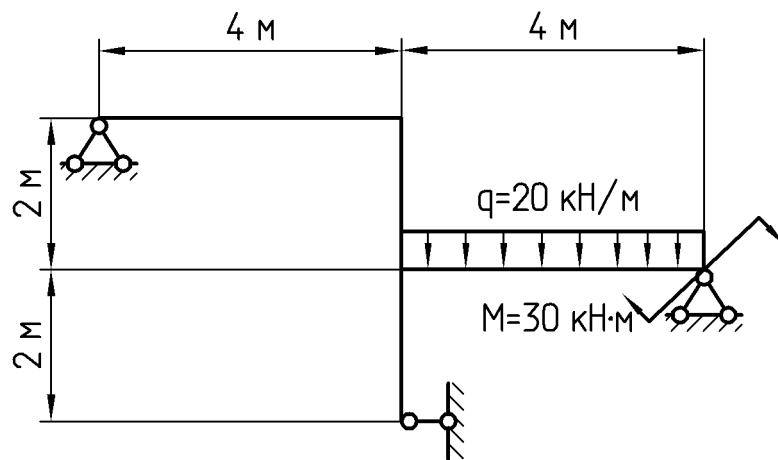


Рисунок 3.20

Розв'язання

1 Встановлюємо ступінь статичної невизначуваності системи. Дана система два рази статично не визначувана.

2 Вибираємо основну систему, видаляючи «зайві зв'язки» і заміняючи вихідну систему статично визначуваною (рис. 3.21, а).

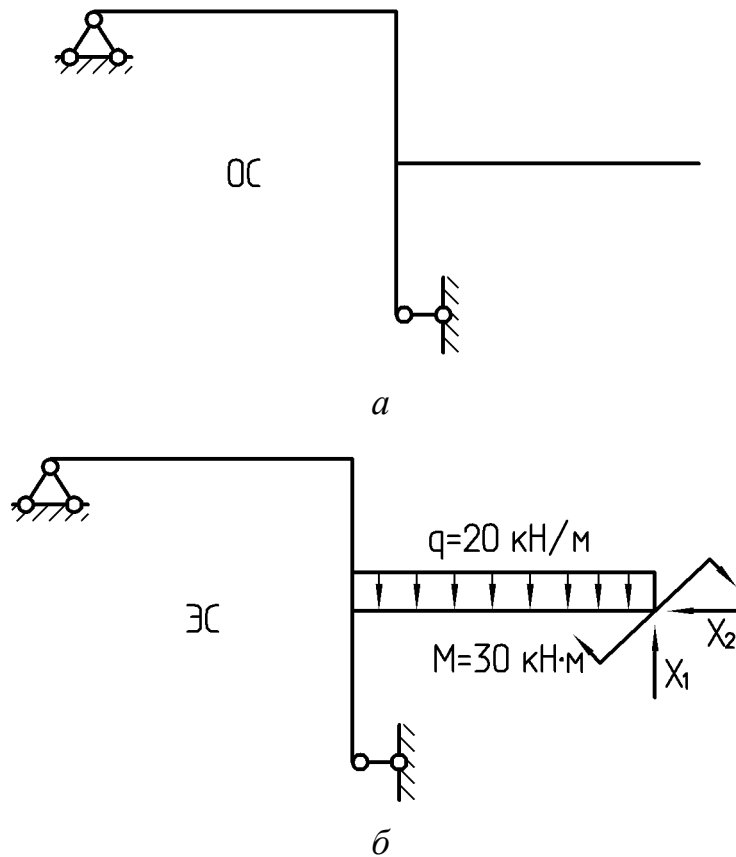


Рисунок 3.21

3 Одержуємо еквівалентну систему, завантажуючи основну систему заданим навантаженням та «зайвими невідомими зусиллями», що замінюють дію вилучених зв'язків (рис. 3.21, б).

4 Для того щоб визначити «зайві невідомі зусилля» X_1 та X_2 , скористаємося системою канонічних рівнянь:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{12}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases}$$

5 Розглянемо основну систему, навантажену тільки заданим навантаженням.

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження (рис. 3.22, а):

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, \\ -M - q \cdot 4 \cdot 6 + H_B \cdot 4 &= 0, \\ H_B &= \frac{M + q \cdot 4 \cdot 6}{4} = \frac{30 + 20 \cdot 4 \cdot 6}{4} = 127,5 \text{ кН}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum P_z &= 0, \\ -H_A + H_B &= 0, \\ H_A &= H_B = 127,5 \text{ кН}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum P_y &= 0, \\ -q \cdot 4 + R_A &= 0, \\ R_A &= q \cdot 4 = 20 \cdot 4 = 80 \text{ кН}.\end{aligned}$$

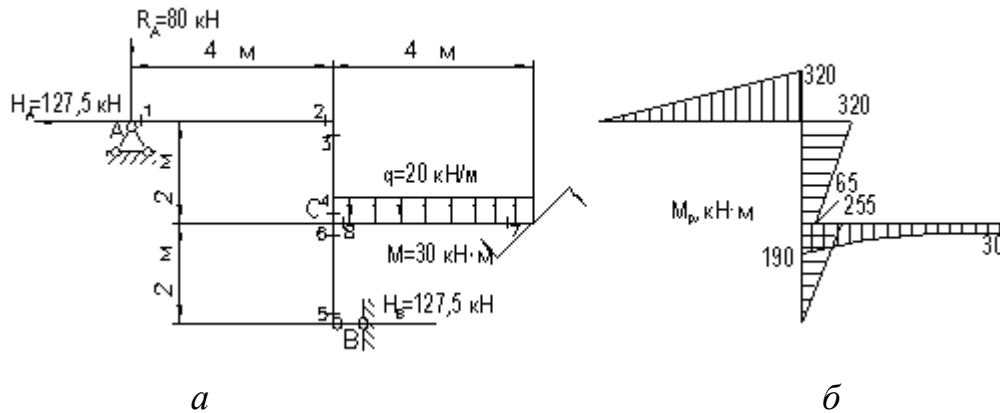


Рисунок 3.22

Для перевірки використаємо рівняння $\sum M_C = 0$.

$$\begin{aligned}-M - q \cdot 4 \cdot 2 - R_A \cdot 4 + H_A \cdot 2 + H_B \cdot 2 &= 0, \\ -30 - 20 \cdot 4 \cdot 2 - 80 \cdot 4 + 127,5 \cdot 2 + 127,5 \cdot 2 &= 0, \\ 510 - 510 &= 0, \\ 0 &= 0.\end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження M_p , обчислюючи значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис 3.22, а):

$$M_1 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = R_A \cdot 4 = 80 \cdot 4 = 320 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = R_A \cdot 4 - H_A \cdot 2 = 80 \cdot 4 - 127,5 \cdot 2 = 65 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_5 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = H_B \cdot 2 = 127,5 \cdot 2 = 255 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_7 = -M = -30 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_8 = -M - q \cdot 4 \cdot 2 = -30 - 20 \cdot 4 \cdot 2 = -190 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії заданого навантаження за характерними перерізами (рис. 3.22, б).

6 Розглянемо основну систему, навантажену тільки одиничною силою X_1 .

Визначаємо опорні реакції від дії одиничної сили X_1 (рис. 3.23, а):

$$\sum M_A = 0,$$

$$X_1 \cdot 8 - H_B \cdot 4 = 0,$$

$$H_B = \frac{X_1 \cdot 8}{4} = \frac{1 \cdot 8}{4} = 2.$$

$$\sum P_z = 0,$$

$$-H_A + H_B = 0,$$

$$H_A = H_B = 2.$$

$$\sum P_y = 0,$$

$$X_1 - R_A = 0,$$

$$R_A = X_1 = 1.$$

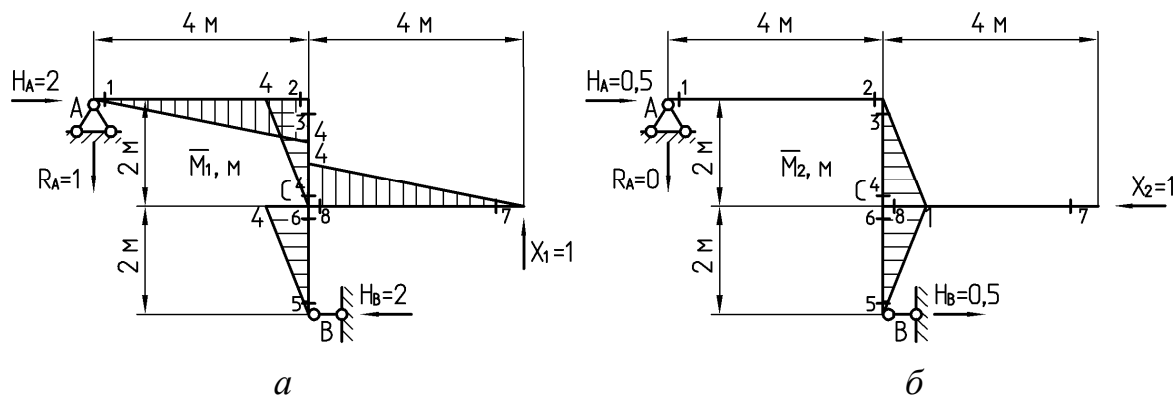


Рисунок 3.23

Для перевірки використаємо рівняння $\sum M_C = 0$:

$$X_1 \cdot 4 + R_A \cdot 4 - H_A \cdot 2 - H_B \cdot 2 = 0,$$

$$1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 0,$$

$$8 - 8 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від одиничної сили \overline{M}_1 , обчислюючи значення згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 3.23, а):

$$M_1 = M_5 = M_7 = 0 \text{ м},$$

$$M_2 = M_3 = -R_A \cdot 4 = -1 \cdot 4 = -4 \text{ м},$$

$$M_4 = -R_A \cdot 4 + H_A \cdot 2 = -1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 0 \text{ м},$$

$$M_6 = H_B \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м},$$

$$M_8 = X_1 \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4 \text{ м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничної сили X_1 за характерними перерізами (див. рис. 3.23, а).

7 Розглянемо основну систему, навантажену тільки одиничною силою X_2 .

Визначаємо опорні реакції від дії одиничної сили X_2 (рис. 3.23, б):

$$\sum M_A = 0,$$

$$-X_2 \cdot 2 + H_B \cdot 4 = 0,$$

$$H_B = \frac{X_2 \cdot 2}{4} = \frac{1 \cdot 2}{4} = 0,5.$$

$$\begin{aligned}\sum P_z &= 0, \\ -X_2 + H_A + H_B &= 0, \\ H_A = X_2 - H_B &= 1 - 0,5 = 0,5.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum P_y &= 0, \\ R_A &= 0.\end{aligned}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum M_C = 0$:

$$\begin{aligned}-H_A \cdot 2 + H_B \cdot 2 &= 0, \\ -0,5 \cdot 2 + 0,5 \cdot 2 &= 0, \\ -1 + 1 &= 0, \\ 0 &= 0.\end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від одиничної сили $\overline{M_2}$.

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 3.23, б):

$$\begin{aligned}M_1 = M_2 = M_3 = M_5 = M_7 = M_8 &= 0 \text{ м}, \\ M_4 = H_A \cdot 2 = 0,5 \cdot 2 &= 1 \text{ м}, \\ M_6 = H_B \cdot 2 = 0,5 \cdot 2 &= 1 \text{ м}.\end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничної сили X_2 за характерними перерізами (рис. 3.23, б).

8 Визначаємо коефіцієнти канонічних рівнянь, перемножуючи відповідні епюри, використовуючи формулу крайніх ординат:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{4}{6EJ_x}(2 \cdot 4 \cdot 4) + \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 4 \cdot 4) + \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 4 \cdot 4) + \frac{4}{6EJ_x}(2 \cdot 4 \cdot 4) = \frac{64}{EJ_x}, \\ \delta_{22} &= \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{1,3}{EJ_x}, \\ \delta_{12} = \delta_{21} &= \frac{2}{6EJ_x}(-4 \cdot 1) + \frac{2}{6EJ_x}(-2 \cdot 4 \cdot 1) = \frac{-4}{EJ_x}, \\ \Delta_{1p} &= \frac{4}{6EJ_x}(-2 \cdot 320 \cdot 4) + \frac{2}{6EJ_x}(-2 \cdot 320 \cdot 4 - 65 \cdot 4) + \frac{2}{6EJ_x}(-2 \cdot 255 \cdot 4) +\end{aligned}$$

$$+ \frac{4}{6EJ_x} (-2 \cdot 190 \cdot 4 - 30 \cdot 4) + \frac{20 \cdot 4^3}{24EJ_x} (4 + 0) = \frac{-4206,7}{EJ_x},$$

$$\Delta_{2p} = \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 65 \cdot 1 + 320 \cdot 1) + \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 255 \cdot 1) = \frac{320}{EJ_x}.$$

9 Перевіряємо правильність визначення коефіцієнтів канонічних рівнянь. Розглянемо основну систему, навантажену тільки одиничними силами X_1 та X_2 .

Визначаємо опорні реакції від дії одиничних сил X_1 та X_2 (рис. 3.24):

$$\sum M_A = 0,$$

$$X_1 \cdot 8 - X_2 \cdot 2 - H_B \cdot 4 = 0,$$

$$H_B = \frac{X_1 \cdot 8 - X_2 \cdot 2}{4} = \frac{1 \cdot 8 - 1 \cdot 2}{4} = 1,5.$$

$$\sum P_z = 0,$$

$$-X_2 + H_A - H_B = 0,$$

$$H_A = H_B + X_2 = 1,5 + 1 = 2,5.$$

$$\sum P_y = 0,$$

$$X_1 - R_A = 0,$$

$$R_A = X_1 = 1.$$

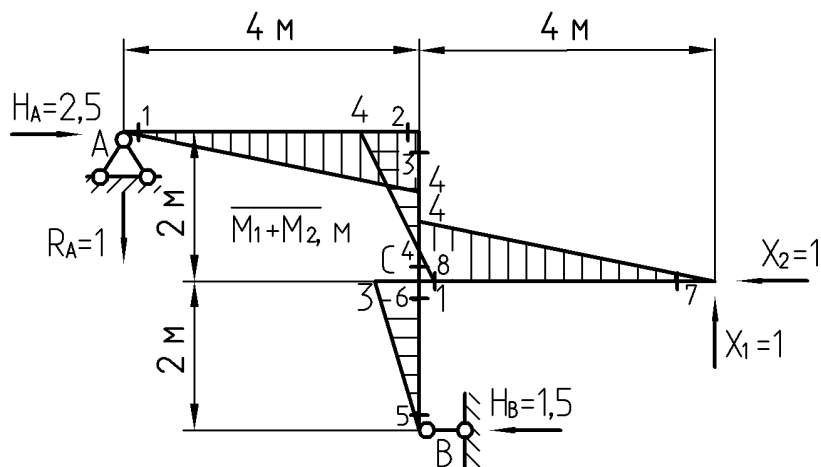


Рисунок 3.24

Для перевірки використаємо рівняння $\sum M_C = 0$:

$$X_1 \cdot 4 + R_A \cdot 4 - H_A \cdot 2 - H_B \cdot 2 = 0,$$

$$1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 - 2,5 \cdot 2 - 1,5 \cdot 2 = 0,$$

$$8 - 8 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від одиничних сил $\overline{M_1 + M_2}$.

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 3.24):

$$M_1 = M_5 = M_7 = 0 \text{ м},$$

$$M_2 = M_3 = -R_A \cdot 4 = -1 \cdot 4 = -4 \text{ м},$$

$$M_4 = -R_A \cdot 4 + H_A \cdot 2 = -1 \cdot 4 + 2,5 \cdot 2 = 1 \text{ м},$$

$$M_6 = H_B \cdot 2 = 1,5 \cdot 2 = 3 \text{ м},$$

$$M_8 = X_1 \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4 \text{ м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничних сил X_1 і X_2 за характерними перерізами (див. рис. 3.24).

Виконуємо перевірку правильності визначення коефіцієнтів δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} і δ_{22} :

$$\begin{aligned} \delta_{(1+2)(1+2)} &= \frac{4}{6EJ_x} (2 \cdot 4 \cdot 4) + \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 1 \cdot 4) + \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 3 \cdot 3) + \\ &+ \frac{4}{6EJ_x} (2 \cdot 4 \cdot 4) = \frac{57,3}{EJ_x}, \end{aligned}$$

$$\delta_{(1+2)(1+2)} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{64}{EJ_x} - \frac{4}{EJ_x} - \frac{4}{EJ_x} + \frac{1,3}{EJ_x} = \frac{57,3}{EJ_x}.$$

Отже, коефіцієнти δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} і δ_{22} визначені вірно.

Виконуємо перевірку правильності визначення коефіцієнтів Δ_{1p} та Δ_{2p} :

$$\begin{aligned} \Delta_{(1+2)p} &= \frac{4}{6EJ_x} (-2 \cdot 320 \cdot 4) + \frac{2}{6EJ_x} (-2 \cdot 320 \cdot 4 + 2 \cdot 65 \cdot 1 + 320 \cdot 1 - 65 \cdot 4) + \\ &+ \frac{2}{6EJ_x} (-2 \cdot 255 \cdot 3) + \frac{4}{6EJ_x} (-2 \cdot 190 \cdot 4 - 30 \cdot 4) + \frac{20 \cdot 4^3}{24EJ_x} (4 + 0) = \frac{-3886,7}{EJ_x}, \end{aligned}$$

$$\Delta_{(1+2)p} = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} = \frac{-4206,7}{EJ_x} + \frac{320}{EJ_x} = \frac{-3886,7}{EJ_x}.$$

Отже, коефіцієнти Δ_{1p} та Δ_{2p} визначені вірно.

10 Розв'язуємо систему канонічних рівнянь:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{64}{EJ_x}X_1 - \frac{4}{EJ_x}X_2 - \frac{4206,7}{EJ_x} = 0, \\ -\frac{4}{EJ_x}X_1 + \frac{1,3}{EJ_x}X_2 + \frac{320}{EJ_x} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 64X_1 - 4X_2 - 4206,7 = 0, \\ -4X_1 + 1,3X_2 + 320 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = \frac{4X_2 + 4206,7}{64}, \\ -4X_1 + 1,3X_2 + 320 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = 0,06X_2 + 65,7, \\ -4 \cdot (0,06X_2 + 65,7) + 1,3X_2 + 320 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = 0,06X_2 + 65,7, \\ -0,24X_2 - 262,8 + 1,3X_2 + 320 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = 0,06X_2 + 65,7, \\ 1,06X_2 + 57,2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = 0,06X_2 + 65,7, \\ X_2 = -52,7 \text{ кН}, \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = 62,4 \text{ кН}, \\ X_2 = -52,7 \text{ кН}. \end{cases}$$

11 Розглянемо еквівалентну систему, тобто статично визначувану основну систему, під дією заданого навантаження та знайдених сил $X_1 = 62,4 \text{ кН}$ та $X_2 = 52,7 \text{ кН}$ (рис. 3.25, а).

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження та сил $X_1 = 62,4 \text{ кН}$ та $X_2 = 52,7 \text{ кН}$ (див. рис 3.25, а):

$$\sum M_A = 0,$$

$$-M - q \cdot 4 \cdot 6 + X_1 \cdot 8 + X_2 \cdot 2 - H_B \cdot 4 = 0,$$

$$H_B = \frac{-M - q \cdot 4 \cdot 6 + X_1 \cdot 8 + X_2 \cdot 2}{4} = \frac{-30 - 20 \cdot 4 \cdot 6 + 62,4 \cdot 8 + 52,7 \cdot 2}{4} = 23,7 \text{ кН}$$

$$\sum P_z = 0,$$

$$X_2 - H_A - H_B = 0,$$

$$H_A = X_2 - H_B = 52,7 - 23,7 = 29,0 \text{ кН}.$$

$$\sum P_y = 0,$$

$$X_1 - q \cdot 4 + R_A = 0,$$

$$R_A = q \cdot 4 - X_1 = 20 \cdot 4 - 62,4 = 17,6 \text{ кН}.$$

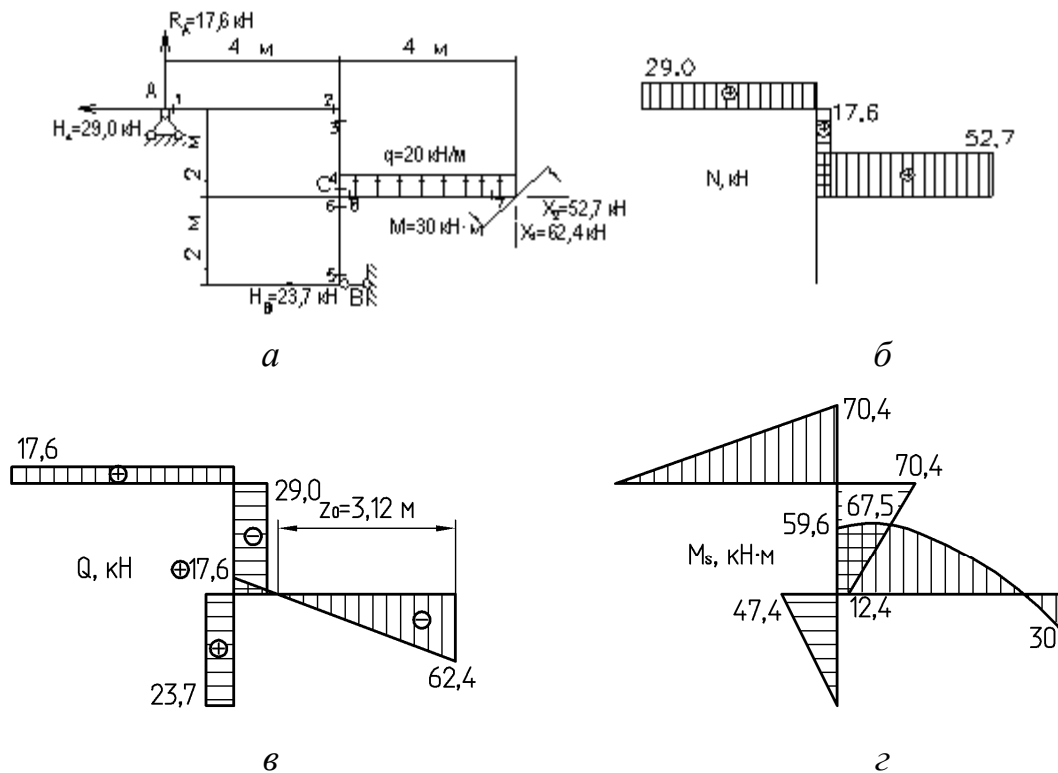


Рисунок 3.25

Для перевірки використаємо рівняння $\sum M_C = 0$:

$$-M - q \cdot 4 \cdot 2 + X_1 \cdot 4 - R_A \cdot 4 + H_A \cdot 2 - H_B \cdot 2 = 0,$$

$$-30 - 20 \cdot 4 \cdot 2 + 62,4 \cdot 4 - 17,6 \cdot 4 + 29,0 \cdot 2 - 23,7 \cdot 2 = 0,$$

$$-307,8 + 307,6 \approx 0.$$

Будуємо остаточні епюри внутрішніх силових факторів.

Обчислюємо значення поздовжніх сил у характерних перерізах:

$$N_1 = N_2 = H_A = 29,0 \text{ кН},$$

$$N_3 = N_4 = R_A = 17,6 \text{ кН},$$

$$N_5 = N_6 = 0 \text{ кН},$$

$$N_7 = N_8 = X_2 = 52,7 \text{ кН}.$$

Обчислюємо значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$\begin{aligned}Q_1 &= Q_2 = R_A = 17,6 \text{ кН}, \\Q_3 &= Q_4 = -H_A = -29,0 \text{ кН}, \\Q_5 &= Q_6 = H_B = 23,7 \text{ кН}, \\Q_7 &= -X_1 = -62,4 \text{ кН}, \\Q_8 &= -X_1 + q \cdot 4 = -62,4 + 20 \cdot 4 = 17,6 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$\begin{aligned}M_1 &= 0 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\M_2 &= M_3 = R_A \cdot 4 = 17,6 \cdot 4 = 70,4 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\M_4 &= R_A \cdot 4 - H_A \cdot 2 = 17,6 \cdot 4 - 29,0 \cdot 2 = 12,4 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\M_5 &= 0 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\M_6 &= H_B \cdot 2 = 23,7 \cdot 2 = 47,4 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\M_7 &= -M = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\M_8 &= -M - q \cdot 4 \cdot 2 + X_1 \cdot 4 = -30 - 20 \cdot 4 \cdot 2 + 62,4 \cdot 4 = 59,6 \text{ кН} \cdot \text{м}\end{aligned}$$

Якщо епюра поперечних сил пересікає базову лінію та змінює знак з «+» на «-», то в цій точці набуває максимального значення згинального моменту. Знаходимо положення цього перерізу.

$$\begin{aligned}z_0 &= \frac{62,4}{20} = 3,12 \text{ м}, \\M_{z_0} &= -M - qz_0 \frac{z_0}{2} + X_1 z_0 = -30 - 20 \cdot 3,12 \cdot \frac{3,12}{2} + 62,4 \cdot 3,12 = 67,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

Будуємо епюри поздовжніх сил N (рис. 3.25, б), поперечних сил Q (рис. 3.25, в), а також згинальних моментів M_s (рис. 3.25, г) за характерними перерізами.

12 Виконуємо деформаційну перевірку.

Якщо в заданій статично не визначуваній системі переміщення за напрямком X_1 дорівнює нулю, то добуток остаточної епюри згинальних моментів M_s на епюрі \overline{M}_1 має дорівнювати нулю, тобто $\Delta_{1s} = 0$:

$$\Delta_{1s} = \frac{4}{6EJ_x}(-2 \cdot 70,4 \cdot 4) + \frac{2}{6EJ_x}(-2 \cdot 70,4 \cdot 4 - 12,4 \cdot 4) + \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 47,4 \cdot 4) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{6EJ_x} (2 \cdot 59,6 \cdot 4 - 30 \cdot 4) + \frac{20 \cdot 4^3}{24EJ_x} (4 + 0) = \\
& = \frac{-375,5 - 204,3 + 126,4 + 237,9 + 213,3}{EJ_x} = \frac{-579,8 + 577,6}{EJ_x}.
\end{aligned}$$

При цьому похибка становила:

$$\frac{579,8 - 577,6}{577,6} \cdot 100\% = 0,4 \, \%.$$

Якщо в заданій статично не визначуваній системі переміщення за напрямком X_2 дорівнює нулю, то добуток остаточної епюри згинальних моментів M_s на епюрі \overline{M}_2 має дорівнювати нулю, тобто $\Delta_{2s} = 0$:

$$\Delta_{2s} = \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 12,4 \cdot 1 + 70,4 \cdot 1) + \frac{2}{6EJ_x} (-2 \cdot 47,4 \cdot 1) = \frac{31,7 - 31,6}{EJ_x}.$$

При цьому похибка становила:

$$\frac{31,7 - 31,6}{31,6} \cdot 100\% = 0,3 \, \%.$$

13 Підбираємо поперечний переріз у вигляді двотавра.

При зазначеному навантаженні небезпечним перерізом є переріз 2, для якого $M_{\max} = M_2 = 70,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Якщо осьова сила незначна, то розміри перерізу підбираємо з умови міцності на згинання:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Визначимо необхідний момент опору перерізу:

$$W_x \geq \frac{70,4 \times 10^{-3}}{160} \times 10^6 = 439,1 \text{ см}^3.$$

Номер двотавра знаходимо за розрахунковим значенням моменту опору $W_x \geq 439,1 \text{ см}^3$. За таблицею сортаменту (ДСТУ 8239-72) вибираємо двотавр № 30, для якого $W_x = 472 \text{ см}^3$, $J_x = 7080 \text{ см}^4$.

14 Визначаємо кут повороту перерізу К.

Для цього до основної системи в перерізі К прикладаємо одиничний момент, тобто $M = 1$.

Визначаємо опорні реакції від дії одиничного моменту (рис. 3.26):

$$R_A = 0,$$

$$H_A = H_B = \frac{M}{4} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах від дії одиничного моменту (див. рис. 3.26):

$$M_1 = M_2 = M_5 = M_7 = M_8 = 0,$$

$$M_3 = M = 1,$$

$$M_4 = M - H_A \cdot 2 = 1 - 0,25 \cdot 2 = 0,5,$$

$$M_6 = H_B \cdot 2 = 0,25 \cdot 2 = 0,5.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту за характерними перерізами (див. рис. 3.26).

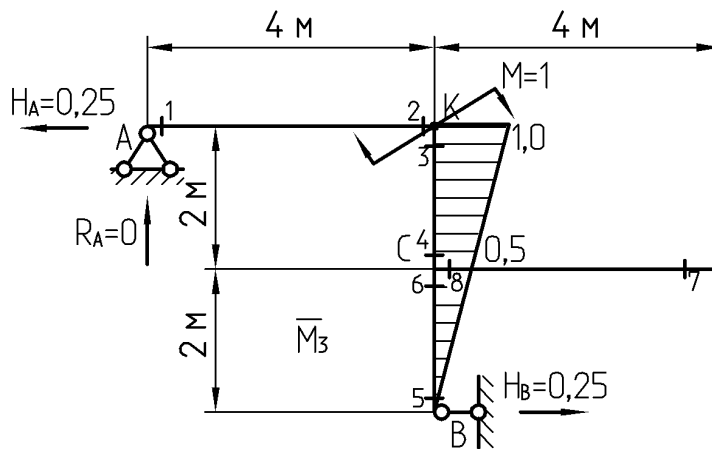


Рисунок 3.26

З використанням формули крайніх ординат «перемножуємо між собою» на кожній ділянці остаточну епюру згинальних моментів M_s та епюру від дії одиничного моменту \bar{M}_3 :

$$\begin{aligned} \theta_K = \Delta_{3s} &= \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 70,4 \cdot 1 + 2 \cdot 12,4 \cdot 0,5 + 70,4 \cdot 0,5 + 12,4 \cdot 1) + \\ &+ \frac{2}{6EJ_x} (-2 \cdot 47,4 \cdot 0,5) = \frac{50,9}{EJ_x}. \end{aligned}$$

Кут повороту перерізу К дорівнює:

$$\theta_K = \frac{50,9 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 7080 \times 10^{-8}} = 0,0036 \text{ рад.}$$

Допустимий кут повороту перерізу дорівнює:

$$[\theta] = 2^\circ = 0,0349 \text{ рад.}$$

Так як кут повороту перерізу К менше, ніж допустимий кут повороту, то жорсткість рами забезпечена.

3.2 Розрахунок нерозрізних балок

Нерозрізними називаються балки, що опираються більш ніж на дві опори та не мають проміжних шарнірів.

Розрахункова схема такої балки подана на рисунку 3.21. Крайні опори можуть бути як шарнірними, так і затисненими.

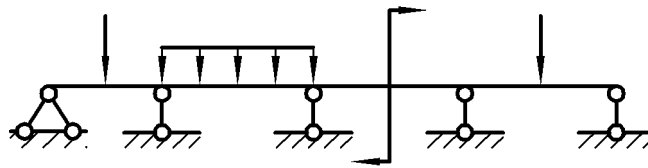


Рисунок 3.27

Розглянемо спочатку випадок шарнірного обпирання. При цьому одна з опор робиться шарнірно-нерухомою, а інші – шарнірно-рухомими. Легко переконатися, що кількість «зайвих» реакцій дорівнює кількості проміжних опор. Якщо балка має жорстке защемлення, то ступінь статичної невизначуваності дорівнює кількості шарнірних опор.

Нерозрізна балка є частковим випадком статично не визначуваної стрижневої системи, тому до неї застосовані всі положення розрахунку таких систем.

Для розкриття статичної невизначуваності нерозрізної балки, зображеної на рисунку 3.27, як основної системи зручніше за все застосовувати систему із врізаними шарнірами, які замінюють «зайві» проміжні опори (рис. 3.28, а).

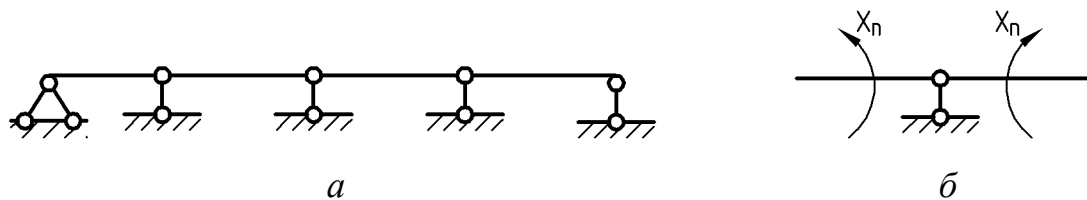


Рисунок 3.28

При такому виборі основної системи дія заданого навантаження поширюється тільки на прогін, де вона прикладена.

Оскільки постановкою шарніра ліквідується згинальний момент у даному перерізі балки, то для відновлення втрачених зв'язків прикладаємо до кожної проміжної опори два рівних і протилежно спрямованих моменти (рис. 3.28, б), що являють собою дію одну на одну віддалених шарніром частин балки.

Таким чином, еквівалентна система буде являти собою низку простих шарнірно обпертих балок, навантажених заданим навантаженням і невідомими згинальними моментами, що заміняють відкинутий зв'язок між сусідніми прольотами.

Усі дії, пов'язані з розкриттям статичної невизначуваності балок, виконуються так само, як і для рам.

Задача 3.5

Для балки, яка подана на рисунку 3.29, необхідно:

- 1) розкрити статичну невизначуваність;
- 2) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів;
- 3) підібрати переріз у вигляді двотавра, якщо $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$;
- 4) визначити прогин у точці К;
- 5) визначити кут повороту перерізу А.

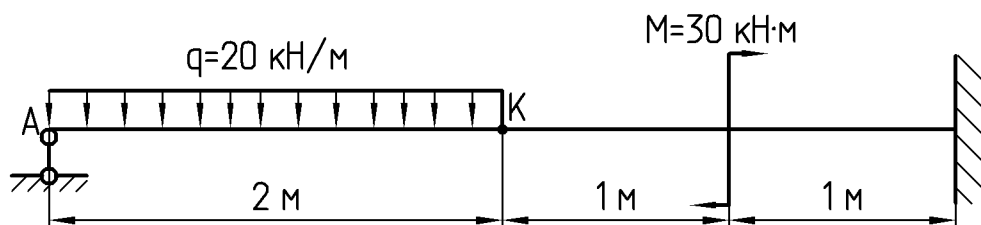


Рисунок 3.29

Розв'язання

1 Встановлюємо ступінь статичної невизначуваності системи (рис. 3.30, а). Дана система один раз статично не визначувана.

2 Вибираємо основну систему. При цьому защемлення із правого краю заміняємо додатковим прогоном нескінченно малої довжини, тобто з довжиною $\ell = 0$ (рис. 3.30, б).

3 Одержуємо еквівалентну систему, завантажуючи основну систему заданим навантаженням і невідомим згинальним моментом X_1 (рис. 3.30, в).

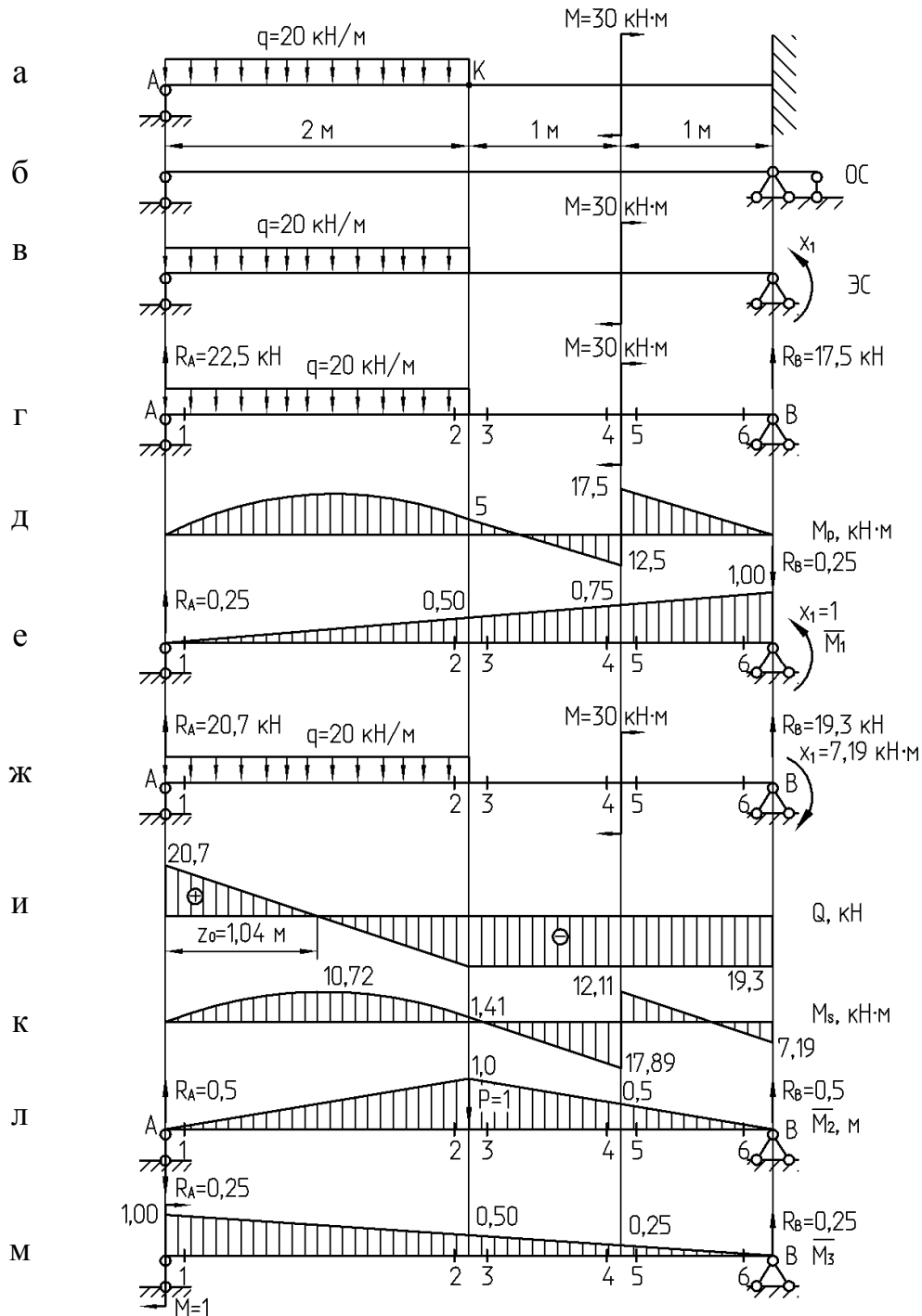


Рисунок 3.30

4 Для того щоб визначити невідомий згинальний момент X_1 , скористаємося канонічним рівнянням

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

5 Розглянемо основну систему, навантажену тільки заданим навантаженням.

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження (рис. 3.30, г):

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, \\ -M - q \cdot 2 \cdot 1 + R_B \cdot 4 &= 0, \\ R_B &= \frac{M + q \cdot 2 \cdot 1}{4} = \frac{30 + 20 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 17,5 \text{ кН}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0, \\ -M + q \cdot 2 \cdot 3 - R_A \cdot 4 &= 0, \\ R_A &= \frac{-M + q \cdot 2 \cdot 3}{4} = \frac{-30 + 20 \cdot 2 \cdot 3}{4} = 22,5 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$\begin{aligned}-q \cdot 2 + R_A + R_B &= 0, \\ -20 \cdot 2 \cdot 1 + 22,5 + 17,5 &= 0, \\ -40,0 + 40,0 &= 0.\end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження M_p .

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис. 3.30, г):

$$\begin{aligned}M_1 &= M_6 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M_2 &= M_3 = R_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 22,5 \cdot 2 - 20 \cdot 2 \cdot 1 = 5,0 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M_5 &= R_B \cdot 1 = 17,5 \cdot 1 = 17,5 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M_4 &= R_B \cdot 1 - M = 17,5 \cdot 1 - 30 = -12,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії заданого навантаження за характерними перерізами (рис. 3.30, д).

6 Розглянемо основну систему, навантажену тільки одиничним моментом X_1 .

Визначаємо опорні реакції від дії одиничного моменту X_1 (рис. 3.30, е):

$$R_A = R_B = \frac{X_1}{4} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від одиничного моменту \overline{M}_1 .

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис. 3.30, е):

$$\begin{aligned} M_1 &= 0, \\ M_2 &= M_3 = R_A \cdot 2 = 0,25 \cdot 2 = 0,50, \\ M_4 &= M_5 = R_A \cdot 3 = 0,25 \cdot 3 = 0,75, \\ M_6 &= X_1 = 1. \end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту за характерними перерізами (див. рис. 3.30, е).

7 Визначаємо коефіцієнти канонічного рівняння, перемножуючи відповідні епюри, використовуючи формулу крайніх ординат:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{4}{6EJ_x} (2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{1,33}{EJ_x}, \\ \Delta_{1p} &= \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 5 \cdot 0,5) + \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x} (0 + 0,50) + \\ &+ \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 5 \cdot 0,50 - 2 \cdot 12,5 \cdot 0,75 + 5 \cdot 0,75 - 12,5 \cdot 0,50) + \\ &+ \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 17,50 \cdot 0,75 + 17,5 \cdot 1,00) = \frac{9,58}{EJ_x}. \end{aligned}$$

8 Розв'язуємо канонічне рівняння:

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} &= 0, \\ \frac{1,33}{EJ_x} X_1 + \frac{9,58}{EJ_x} &= 0, \\ 1,33 X_1 + 9,58 &= 0, \\ X_1 &= \frac{-9,58}{1,33} = -7,19 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

9 Розглянемо еквівалентну систему, тобто статично визначувану основну систему, під дією заданого навантаження та знайденого моменту $X_1 = 7,19 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Якщо X_1 одержали зі знаком «—», то його напрямок змінюємо на протилежний (рис. 3.30, ж). Будуємо остаточні епюри внутрішніх силових факторів.

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження та знайденого моменту $X_1 = 7,19 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (див. рис. 3.30, ж):

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, \\ -M - q \cdot 2 \cdot 1 - X_1 + R_B \cdot 4 &= 0, \\ R_B &= \frac{M + q \cdot 2 \cdot 1 + X_1}{4} = \frac{30 + 20 \cdot 2 \cdot 1 + 7,19}{4} = 19,3 \text{ кН}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0, \\ -M + q \cdot 2 \cdot 3 - X_1 - R_A \cdot 4 &= 0, \\ R_A &= \frac{-M + q \cdot 2 \cdot 3 - X_1}{4} = \frac{-30 + 20 \cdot 2 \cdot 3 - 7,19}{4} = 20,7 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$\begin{aligned}-q \cdot 2 + R_A + R_B &= 0, \\ -20 \cdot 2 \cdot 1 + 20,7 + 19,3 &= 0, \\ -40,0 + 40,0 &= 0.\end{aligned}$$

Обчислюємо значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$\begin{aligned}Q_1 &= R_A = 20,7 \text{ кН}, \\ Q_2 = Q_3 &= R_A - q \cdot 2 = 20,7 - 20 \cdot 2 = -19,3 \text{ кН}, \\ Q_6 = Q_5 = Q_4 = Q_3 &= -R_B = -19,3 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$\begin{aligned}M_1 &= 0 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M_2 = M_3 &= R_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 20,7 \cdot 2 - 20 \cdot 2 \cdot 1 = 1,41 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M_6 &= -X_1 = -7,19 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M_5 &= -X_1 + R_B \cdot 1 = -7,19 + 19,3 \cdot 1 = 12,11 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M_5 &= -X_1 + R_B \cdot 1 - M = -7,19 + 19,3 \cdot 1 - 30 = -17,89 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

Якщо епюра поперечних сил пересікає базову лінію та змінює знак з «+» на «-», то в цій точці маємо максимальне значення згинального моменту. Знаходимо положення цього перерізу.

$$z_0 = \frac{20,7}{20} = 1,04 \text{ м},$$

$$M_{z_0} = R_A z_0 - q z_0 \frac{z_0}{2} = 20,7 \cdot 1,04 - 20 \cdot 1,04 \cdot \frac{1,04}{2} = 10,72 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюри поперечних сил Q (рис. 3.30, и) і згинальних моментів M_s (рис. 3.30, к) за характерними перерізами.

10 Виконуємо деформаційну перевірку. Якщо в заданій статично невизначуваній системі взаємний кут повороту на проміжній опорі дорівнює нулю, то добуток остаточної епюри згинальних моментів M_s на епюру \overline{M}_1 має дорівнювати нулю, тобто $\Delta_{Is} = 0$:

$$\begin{aligned} \Delta_{Is} &= \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 1,41 \cdot 0,5) + \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x} (0 + 0,50) + \\ &+ \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 1,41 \cdot 0,50 - 2 \cdot 17,89 \cdot 0,75 + 1,41 \cdot 0,75 - 17,89 \cdot 0,50) + \\ &+ \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 12,11 \cdot 0,75 - 2 \cdot 7,19 \cdot 1,00 + 12,11 \cdot 1,00 - 7,19 \cdot 0,75) = \\ &= \frac{0,47 + 3,33 - 5,55 + 1,75}{EJ_x} = \frac{5,55 - 5,55}{EJ_x}. \end{aligned}$$

11 Підбираємо поперечний переріз у вигляді двотавра.

При зазначеному навантаженні небезпечним перерізом є переріз 4, для якого $M_{\max} = M_4 = 17,89 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Розміри перерізу підбираємо з умови міцності на згинання:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Визначимо необхідний момент опору перерізу:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]},$$

$$W_x \geq \frac{17,89 \times 10^{-3}}{180} \times 10^6 = 99,4 \text{ см}^3.$$

Номер двотавра знаходимо за розрахунковим значенням моменту опору $W_x \geq 99,4 \text{ см}^3$. За таблицею сортаменту (ДСТУ 8239-72) вибираємо двотавр № 16, для якого $W_x = 109 \text{ см}^3$, $J_x = 873 \text{ см}^4$.

12 Визначаємо прогин у точці К.

Для цього до основної системи в точці К прикладаємо одиничну силу, тобто $P = 1$.

Визначаємо опорні реакції від дії одиничної сили, дорівнюючи нулю суми моментів усіх зовнішніх сил відносно точок А та В (рис. 3.30, л):

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, \\ -P \cdot 2 + R_B \cdot 4 &= 0, \\ R_B &= \frac{P \cdot 2}{4} = \frac{1 \cdot 2}{4} = 0,5.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0, \\ P \cdot 2 - R_A \cdot 4 &= 0, \\ R_A &= \frac{P \cdot 2}{4} = \frac{1 \cdot 2}{4} = 0,5.\end{aligned}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$\begin{aligned}-P + R_A + R_B &= 0, \\ -1 + 0,5 + 0,5 &= 0, \\ -1 + 1 &= 0, \\ 0 &= 0.\end{aligned}$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах від дії одиничної сили (див. рис. 3.30, л):

$$\begin{aligned}M_1 &= M_6 = 0 \text{ м}, \\ M_2 &= M_3 = R_A \cdot 2 = 0,5 \cdot 2 = 1,0 \text{ м}, \\ M_4 &= M_5 = R_B \cdot 1 = 0,5 \cdot 1 = 0,5 \text{ м}.\end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничної сили за характерними перерізами (див. рис. 3.30, л).

З використанням формули крайніх ординат «перемножуємо між собою» на кожній ділянці остаточну епюру згинальних моментів M_s та епюру від дії одиничної сили \overline{M}_2 :

$$y_K = \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 1,41 \cdot 1,0) + \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x}(0 + 1,0) + \\ + \frac{1}{6EJ_x}(2 \cdot 1,41 \cdot 1,0 - 2 \cdot 17,89 \cdot 0,5 + 1,41 \cdot 0,5 - 17,89 \cdot 1,0) + \\ + \frac{1}{6EJ_x}(2 \cdot 12,11 \cdot 0,5 - 7,19 \cdot 0,5) = \frac{3,65}{EJ_x}.$$

Прогин у точці К дорівнює:

$$y_K = \frac{3,65 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 873 \times 10^{-8}} = 0,0021 \text{ м}.$$

Допустимий прогин балки довжиною $\ell = 4 \text{ м}$ дорівнює:

$$[y] = \frac{\ell}{200} = \frac{4}{200} = 0,02 \text{ м}.$$

Якщо прогин у точці К менше, ніж допустимий прогин для балки, то жорсткість балки забезпечена.

13 Визначаємо кут повороту перерізу А.

Для цього до основної системи в перерізі А прикладаємо одиничний момент, тобто $M = 1$.

Визначаємо опорні реакції від дії одиничного моменту $M = 1$ (рис. 3.30, м):

$$R_A = R_B = \frac{M}{4} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис. 3.30, м):

$$M_1 = M = 1,$$

$$M_2 = M_3 = M - R_A \cdot 2 = 1 - 0,25 \cdot 2 = 0,50,$$

$$M_4 = M_5 = M - R_A \cdot 3 = 1 - 0,25 \cdot 3 = 0,25,$$

$$M_6 = 0.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту за характерними перерізами (див. рис. 3.30, м).

З використанням формули крайніх ординат «перемножуємо між собою» на кожній ділянці остаточну епюру згинальних моментів M_s та епюру від дії одиничного моменту \overline{M}_3 :

$$\begin{aligned}\theta_A = & \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 1,41 \cdot 0,50 + 1,41 \cdot 1,00) + \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x}(1,00 + 0,50) + \\ & + \frac{1}{6EJ_x}(2 \cdot 1,41 \cdot 0,50 - 2 \cdot 17,89 \cdot 0,25 + 1,41 \cdot 0,25 - 17,89 \cdot 0,50) + \\ & + \frac{1}{6EJ_x}(2 \cdot 12,11 \cdot 0,25 - 7,19 \cdot 0,25) = \frac{8,96}{EJ_x}.\end{aligned}$$

Кут повороту перерізу А дорівнює:

$$\theta_A = \frac{8,96 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 873 \times 10^{-8}} = 0,0051 \text{ рад.}$$

Допустимий кут повороту перерізу дорівнює:

$$[\theta] = 2^\circ = 0,0349 \text{ рад.}$$

Якщо кут повороту перерізу А менше, ніж допустимий кут повороту, то жорсткість рами забезпечена.

Задача 3.6

Для балки, яка зображена на рисунку 3.31, необхідно:

- 1) розкрити статичну невизначуваність;
- 2) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів;
- 3) підібрати переріз у вигляді двотавра, якщо $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$;
- 4) визначити прогин у точці К;
- 5) визначити кут повороту перерізу А.

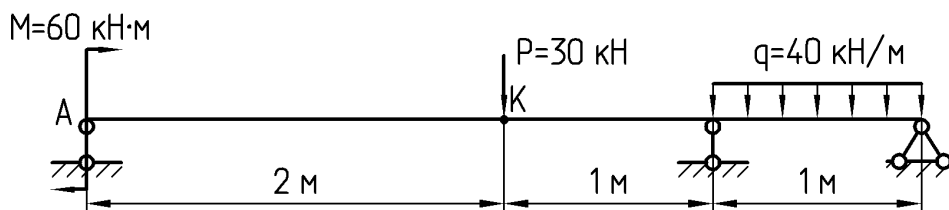


Рисунок 3.31

Розв'язання

1 Встановлюємо ступінь статичної невизначуваності системи (рис. 3.32, а). Дана система один раз статично не визначувана.

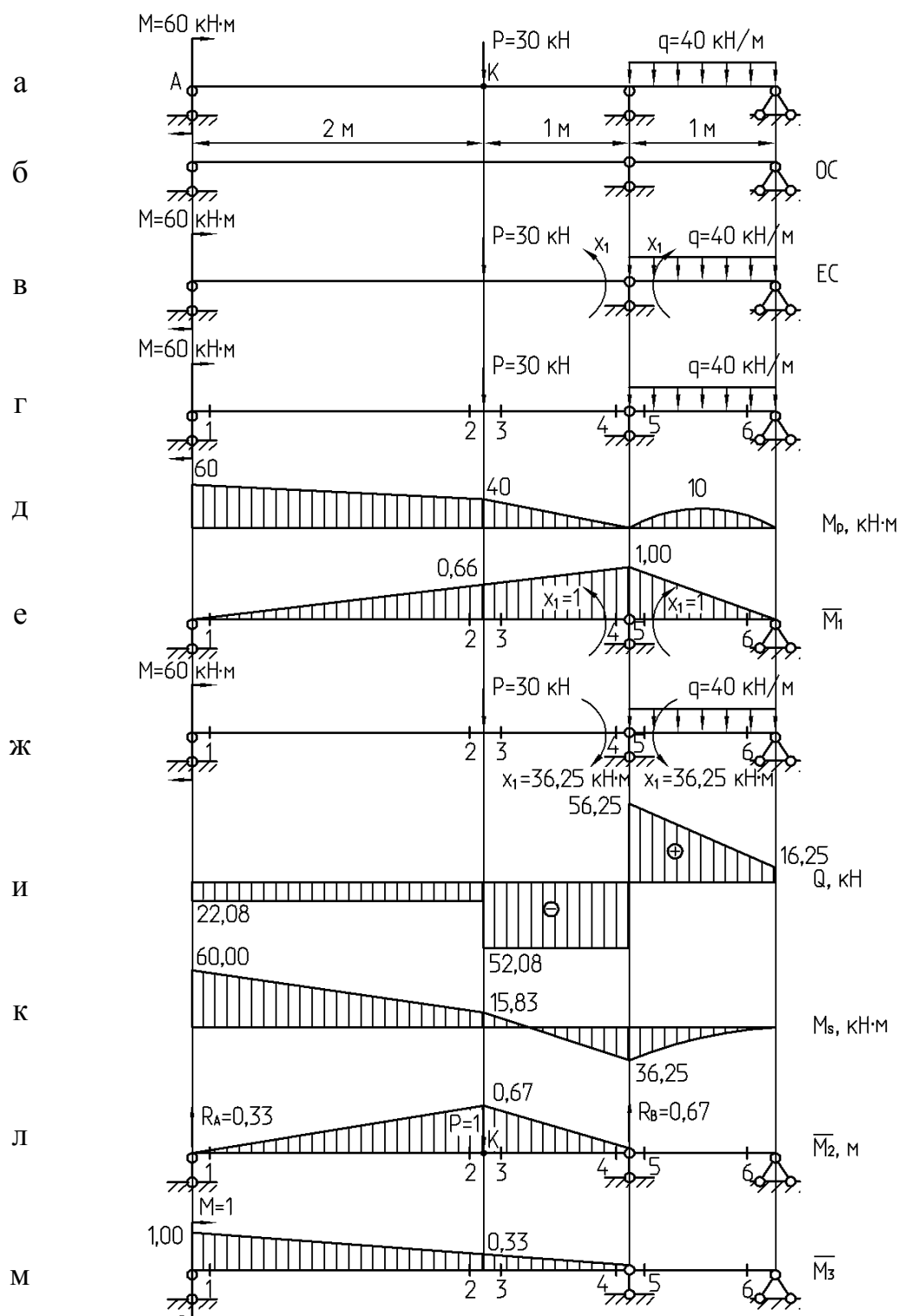


Рисунок 3.32

2 Вибираємо основну систему. Як основну система застосовуємо систему із врізаним шарніром, що заміняє «зайву» проміжну опору (рис. 3.32, б).

3 Одержуємо еквівалентну систему, завантажуючи основну систему заданим навантаженням і невідомим згинальним моментом X_1 (рис. 3.32, в). Таким чином, еквівалентна система являє собою дві прості шарнірно обперті балки, навантажені заданим навантаженням і невідомим згинальним моментом X_1 , що заміняє відкинутий зв'язок між сусідніми прогонами.

4 Для того щоб визначити невідомий згинальний момент X_1 , скористаємося канонічним рівнянням

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

5 Розглянемо основну систему, навантажену тільки заданим навантаженням (рис. 3.32, г).

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження, розглядаючи балку АВ (рис. 3.33, а):

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, \\ -M - P \cdot 2 + R_{B1} \cdot 3 &= 0, \\ R_{B1} &= \frac{M + P \cdot 2}{3} = \frac{60 + 30 \cdot 2}{3} = 40 \text{ кН}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0, \\ -M + P \cdot 1 - R_A \cdot 3 &= 0, \\ R_A &= \frac{-M + P \cdot 1}{3} = \frac{-60 + 30 \cdot 1}{3} = -10 \text{ кН}\end{aligned}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$\begin{aligned}-P + R_A + R_{B1} &= 0, \\ -30 - 10 + 40 &= 0, \\ -40 + 40 &= 0, \\ 0 &= 0.\end{aligned}$$

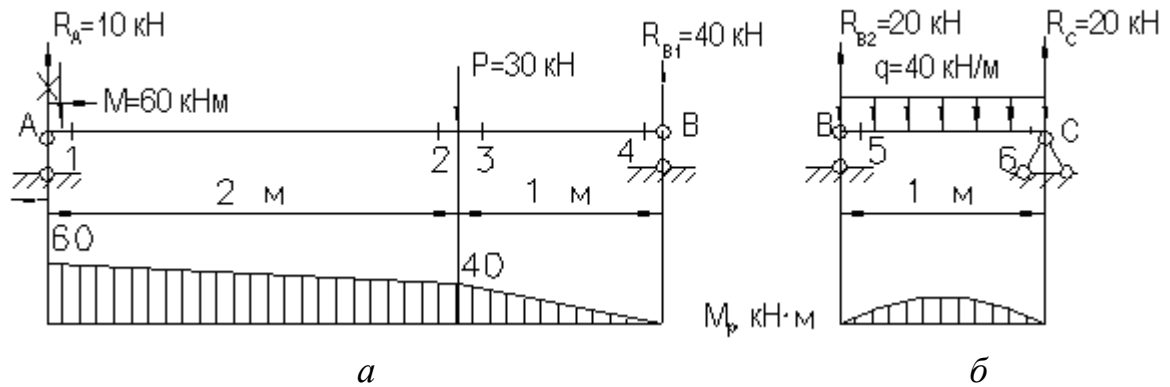


Рисунок 3.33

Будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження M_p для балки АВ, обчислюючи значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис. 3.33, а):

$$M_1 = M = 60 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = M - R_A \cdot 2 = 60 - 10 \cdot 2 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження, розглядаючи балку ВС (рис. 3.33, б). Через симетрію балки ВС і заданого навантаження маємо:

$$R_{B2} = R_C = \frac{q \cdot l}{2} = \frac{40 \cdot 1}{2} = 20 \text{ кН}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження M_p для балки ВС, обчислюючи значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис. 3.33, б):

$$M_5 = M_6 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії заданого навантаження за характерними перерізами (рис. 3.32, д).

6 Розглянемо основну систему, навантажену тільки одиничним моментом X_1 .

Визначаємо опорні реакції від дії одиничного моменту X_1 , розглядаючи балку АВ (рис. 3.32, е):

$$R_A = R_{B1} = \frac{X_1}{3} = \frac{1}{3} = 0,33.$$

Визначаємо опорні реакції від дії одиничного моменту X_1 , розглядаючи балку ВС (див. рис. 3.32, е):

$$R_{B2} = R_C = \frac{X_1}{1} = \frac{1}{1} = 1,00.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від одиничного моменту \overline{M}_1 .

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис. 3.32, е):

$$M_1 = M_6 = 0,$$

$$M_2 = M_3 = R_A \cdot 2 = 0,33 \cdot 2 = 0,66,$$

$$M_4 = M_5 = X_1 = 1.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту за характерними перерізами (див. рис. 3.32, е).

7 Визначаємо коефіцієнти канонічного рівняння, перемножуючи відповідні епюри, використовуючи формулу крайніх ординат:

$$\delta_{11} = \frac{3}{6EJ_x} (2 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{1,33}{EJ_x},$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} = & \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 40 \cdot 0,66 + 60 \cdot 0,66) + \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 40 \cdot 0,66 + 40 \cdot 1,00) + \\ & + \frac{40 \cdot 1^3}{24EJ_x} (1,00 + 0) = \frac{48,33}{EJ_x}. \end{aligned}$$

8 Розв'язуємо канонічне рівняння.

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0,$$

$$\frac{1,33}{EJ_x} X_1 + \frac{48,33}{EJ_x} = 0,$$

$$1,33 X_1 + 48,33 = 0,$$

$$X_1 = \frac{-48,33}{1,33} = -36,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

9 Розглянемо еквівалентну систему, тобто статично визначувану основну систему, під дією заданого навантаження та знайденого моменту

$X_1 = 36,25 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Якщо X_1 одержали зі знаком «-», то його напрямок змінюємо на протилежний (рис. 3.32, ж). Будуємо остаточні епюри внутрішніх силових факторів.

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження та знайденого моменту $X_1 = 36,25 \text{ кН} \cdot \text{м}$, розглядаючи балку АВ (рис. 3.34, а):

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, \\ -M - P \cdot 2 - X_1 + R_{B1} \cdot 3 &= 0, \\ R_{B1} &= \frac{M + P \cdot 2 + X_1}{3} = \frac{60 + 30 \cdot 2 + 36,25}{3} = 52,08 \text{ кН} \\ \sum M_B &= 0, \\ -M + P \cdot 1 - X_1 - R_A \cdot 3 &= 0, \\ R_A &= \frac{-M + P \cdot 1 - X_1}{3} = \frac{-60 + 30 \cdot 1 - 36,25}{3} = -22,08 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$.

$$\begin{aligned}-P + R_A + R_{B1} &= 0, \\ -30 - 22,08 + 52,08 &= 0, \\ -52,08 + 52,08 &= 0, \\ 0 &= 0.\end{aligned}$$

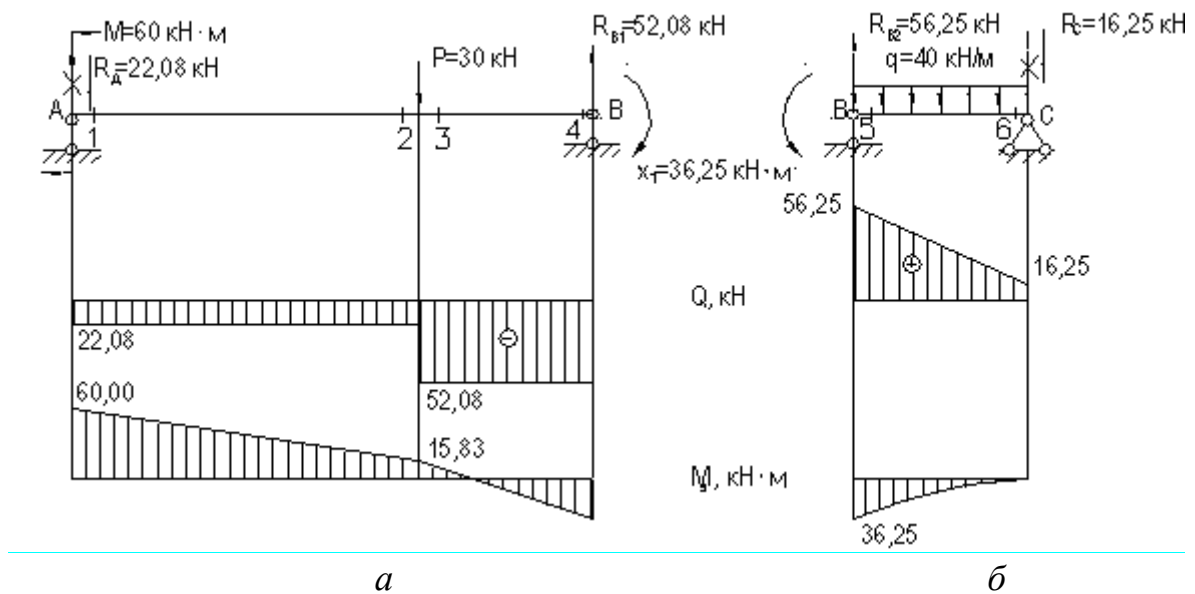


Рисунок 3.34

Обчислюємо значення поперечних сил у характерних перерізах :

$$Q_1 = Q_2 = -R_A = -22,08 \text{ кН},$$

$$Q_3 = Q_4 = -R_{B1} = -52,08 \text{ кН}.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$M_1 = M = 60 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = M - R_A \cdot 2 = 60 - 22,08 \cdot 2 = 15,83 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = -X_1 = -36,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження та знайденого моменту $X_1 = 36,25 \text{ кН} \cdot \text{м}$, розглядаючи балку ВС (рис. 3.34, б):

$$\sum M_B = 0,$$

$$X_1 - q \cdot 1 \cdot 0,5 + R_C \cdot 1 = 0,$$

$$R_C = \frac{-X_1 + q \cdot 1 \cdot 0,5}{1} = \frac{-36,25 + 40 \cdot 1 \cdot 0,5}{1} = -16,25 \text{ кН}.$$

$$\sum M_C = 0,$$

$$X_1 + q \cdot 1 \cdot 0,5 - R_{B2} \cdot 1 = 0,$$

$$R_{B2} = \frac{X_1 + q \cdot 1 \cdot 0,5}{1} = \frac{36,25 + 40 \cdot 1 \cdot 0,5}{1} = 56,25 \text{ кН}.$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$-q \cdot 1 + R_{B2} + R_C = 0,$$

$$-40 \cdot 1 + 56,25 - 16,25 = 0,$$

$$-56,25 + 56,25 = 0.$$

Обчислюємо значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$Q_5 = R_{B2} = 56,25 \text{ кН},$$

$$Q_6 = R_C = 16,25 \text{ кН}.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$M_5 = -X_1 = -36,25 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюри поперечних сил Q (рис. 3.32, и) і згинальних моментів M_s (рис. 3.32, к) за характерними перерізами.

10 Виконуємо деформаційну перевірку. Якщо в заданій статично невизначуваній системі взаємний кут повороту на проміжній опорі дорівнює нулю, то добуток остаточної епюри згинальних моментів M_s на епюру \overline{M}_1 має дорівнювати нулю, тобто $\Delta_{1s} = 0$:

$$\begin{aligned}\Delta_{1s} &= \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 15,83 \cdot 0,66 + 60 \cdot 0,66) + \\ &+ \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 15,83 \cdot 0,666 - 2 \cdot 36,25 \cdot 1,00 + 15,83 \cdot 1,00 - 36,25 \cdot 0,66) + \\ &+ \frac{1}{6EJ_x} (-2 \cdot 36,25 \cdot 1,00) + \frac{40 \cdot 1^3}{24EJ_x} (1,00 + 0) = \\ &= \frac{20,47 - 9,96 - 12,08 + 1,67}{EJ_x} = \frac{22,14 - 22,04}{EJ_x}.\end{aligned}$$

При цьому похибка становила:

$$\frac{22,14 - 22,04}{22,04} \cdot 100\% = 0,5 \, \%.$$

11 Підбираємо поперечний переріз у вигляді двотавра.

При зазначеному навантаженні небезпечним перерізом є переріз 1, для якого $M_{\max} = M_1 = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Розміри перерізу підбираємо з умови міцності на згинання:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Визначимо необхідний момент опору перерізу:

$$\begin{aligned}W_x &\geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}, \\ W_x &\geq \frac{60 \times 10^{-3}}{180} \times 10^6 = 333 \text{ см}^3.\end{aligned}$$

Номер двотавра знаходимо за розрахунковим значенням моменту опору $W_x \geq 333 \text{ см}^3$. За таблицею сортаменту (ДСТУ 8239-72) вибираємо двотавр № 27, для якого $W_x = 371 \text{ см}^3$, $J_x = 5010 \text{ см}^4$.

12 Визначаємо прогин у точці К.

Для цього до основної системи в точці К прикладаємо одиничну силу, тобто $P = 1$.

Визначаємо опорні реакції від дії одиничної сили, дорівнюючи нулю суми моментів всіх зовнішніх сил відносно точок А та В (рис. 3.32, л):

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, \\ -P \cdot 2 + R_B \cdot 3 &= 0, \\ R_B &= \frac{P \cdot 2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3} = 0,67.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0, \\ P \cdot 1 - R_A \cdot 3 &= 0, \\ R_A &= \frac{P \cdot 1}{3} = \frac{1 \cdot 1}{3} = 0,33.\end{aligned}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$\begin{aligned}-P + R_A + R_B &= 0, \\ -1 + 0,33 + 0,67 &= 0, \\ -1 + 1 &= 0, \\ 0 &= 0.\end{aligned}$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах від дії одиничної сили (див. рис. 3.32, л):

$$\begin{aligned}M_1 = M_4 = M_5 = M_6 &= 0 \text{ м}, \\ M_2 = M_3 = R_B \cdot 1 &= 0,67 \cdot 1 = 0,67 \text{ м}.\end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничної сили за характерними перерізами (див. рис. 3.32, л).

З використанням формули крайніх ординат «перемножуємо між собою» на кожній ділянці остаточну епюру згинальних моментів M_s та епюру від дії одиничної сили \overline{M}_2 :

$$\begin{aligned}y_K &= \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 15,83 \cdot 0,67 + 60 \cdot 0,67) + \\ &+ \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 15,83 \cdot 0,67 - 36,25 \cdot 0,67) = \frac{19,86}{EJ_x}.\end{aligned}$$

Прогин у точці К дорівнює:

$$y_K = \frac{19,86 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 5010 \times 10^{-8}} = 0,0020 \text{ м}.$$

Допустимий прогин балки довжиною $\ell = 4 \text{ м}$ дорівнює:

$$[y] = \frac{\ell}{200} = \frac{4}{200} = 0,02 \text{ м}.$$

Якщо прогин у точці К менше, ніж допустимий прогин для балки, то жорсткість балки забезпечена.

13 Визначаємо кут повороту перерізу А.

Для цього до основної системи в перерізі А прикладаємо одиничний момент, тобто $M = 1$.

Визначаємо опорні реакції від дії одиничного моменту $M = 1$ (рис. 3.32, м):

$$R_A = R_{B1} = \frac{M}{3} = \frac{1}{3} = 0,33.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис. 3.32, м):

$$M_1 = M = 1,$$

$$M_2 = M_3 = R_B \cdot 1 = 0,33 \cdot 1 = 0,33 \text{ м},$$

$$M_4 = M_5 = M_6 = 0.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту за характерними перерізами (див. рис. 3.32, м).

З використанням формули крайніх ординат «перемножуємо між собою» на кожній ділянці остаточну епюру згинальних моментів M_s та епюру від дії одиничного моменту \overline{M}_3 :

$$\begin{aligned} \theta_A = & \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 60,00 \cdot 1,00 + 2 \cdot 15,83 \cdot 0,33 + 60,00 \cdot 0,33 + 15,83 \cdot 1,00) + \\ & + \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 15,83 \cdot 0,33) = \frac{55,21}{EJ_x}. \end{aligned}$$

Кут повороту перерізу А дорівнює:

$$\theta_A = \frac{55,21 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 5010 \times 10^{-8}} = 0,0055 \text{ рад}.$$

Допустимий кут повороту перерізу дорівнює:

$$[\theta] = 2^\circ = 0,0349 \text{ рад.}$$

Якщо кут повороту перерізу A менше, ніж допустимий кут повороту, то жорсткість рами забезпечена.

Задача 3.7

Для балки, яка подана на рисунку 3.35, необхідно:

- 1) розкрити статичну невизначуваність;
- 2) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів;
- 3) підібрати переріз у вигляді двотавра, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$;
- 4) визначити прогин у точці K ;
- 5) визначити кут повороту перерізу B .

Розв'язання

1 Встановлюємо ступінь статичної невизначуваності системи (рис. 3.36, а). Дана система два рази статично не визначувана.

2 Вибираємо основну систему. При цьому защемлення з лівого краю заміняємо додатковим прольотом нескінченно малої довжини, тобто з довжиною $\ell = 0$, а проміжну опору заміняємо врізаним шарніром (рис. 3.36, б).

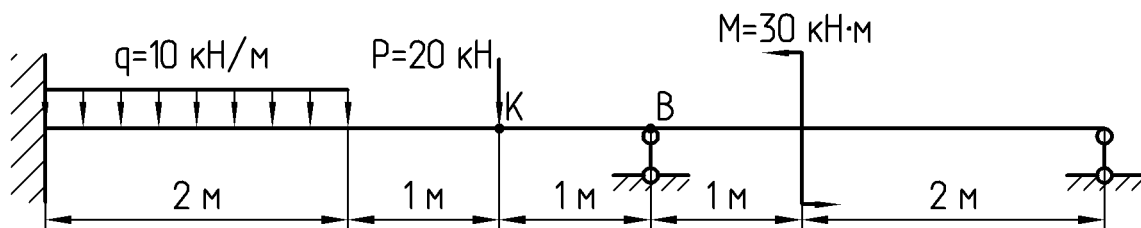


Рисунок 3.35

3 Одержуємо еквівалентну систему, завантажуючи основну систему заданим навантаженням і невідомими згинальними моментами X_1 та X_2 (рис. 3.36, в). Таким чином, еквівалентна система являє собою дві прості шарнірно оперті балки, навантажені заданим навантаженням і невідомими згинальними моментами X_1 та X_2 , що заміняють відкинуті зв'язки між сусідніми прогонами.

4 Для того щоб визначити невідомі згинальні моменти X_1 та X_2 , скористаємося системою канонічних рівнянь:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases}$$

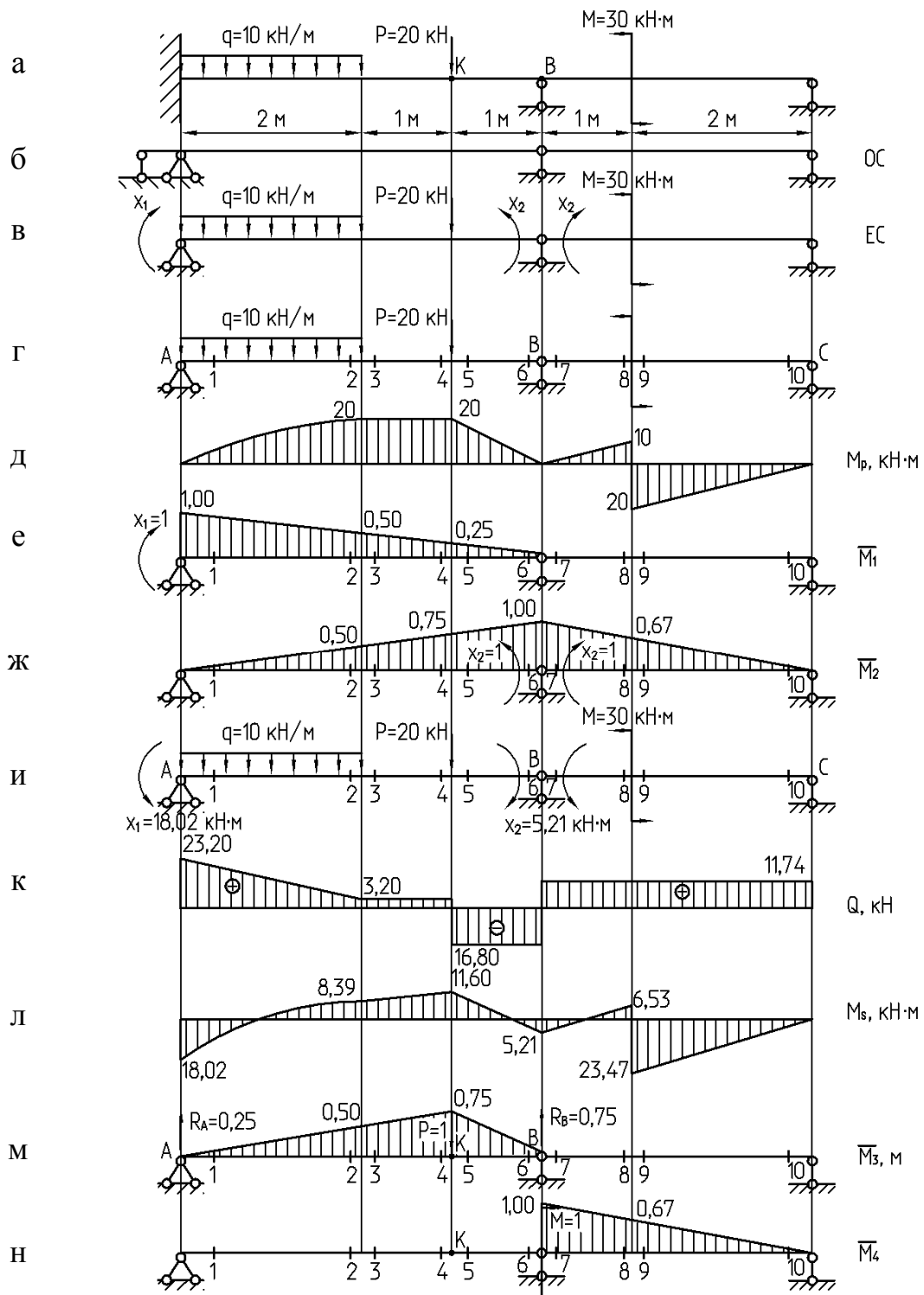


Рисунок 3.36

5 Розглянемо основну систему, навантажену тільки заданим навантаженням (рис. 3.36, г).

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження, розглядаючи балку АВ (рис. 3.37, а):

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, \\ -P \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 1 + R_{B1} \cdot 4 &= 0, \\ R_{B1} &= \frac{P \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 1}{4} = \frac{20 \cdot 3 + 10 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 20 \text{ кН}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0, \\ P \cdot 1 + q \cdot 2 \cdot 3 - R_A \cdot 4 &= 0, \\ R_A &= \frac{P \cdot 1 + q \cdot 2 \cdot 3}{4} = \frac{20 \cdot 1 + 10 \cdot 2 \cdot 3}{4} = 20 \text{ кН}\end{aligned}$$

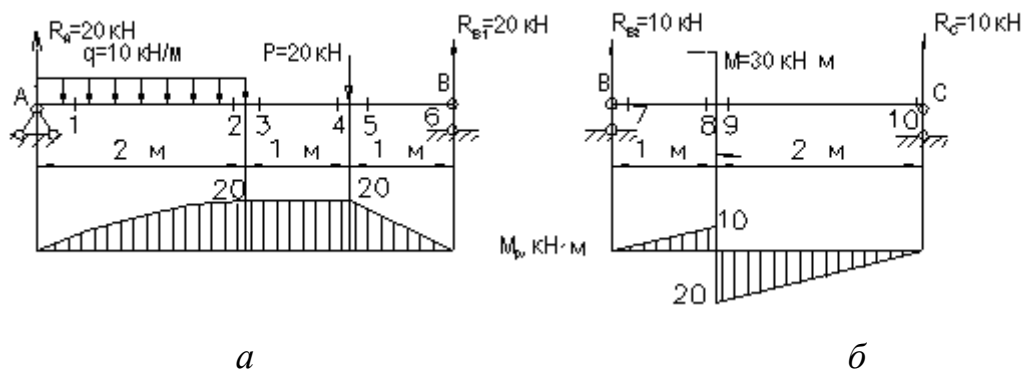


Рисунок 3.37

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$.

$$\begin{aligned}-P - q \cdot 2 + R_A + R_{B1} &= 0, \\ -20 - 10 \cdot 2 + 20 + 20 &= 0, \\ -40 + 40 &= 0, \\ 0 &= 0.\end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження M_p для балки АВ, обчислюючи значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис. 3.37, а):

$$M_1 = M_6 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = R_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 20 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = M_5 = R_{B1} \cdot 1 = 20 \cdot 1 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження, розглядаючи балку ВС (рис. 3.37, б):

$$R_{B2} = R_C = \frac{M}{3} = \frac{30}{3} = 10 \text{ кН}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження M_p для балки ВС, обчислюючи значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис. 3.37, б).

$$M_7 = M_{10} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_8 = R_{B2} \cdot 1 = 10 \cdot 1 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_9 = -R_C \cdot 2 = -10 \cdot 2 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії заданого навантаження за характерними перерізами (рис. 3.36, д).

6 Розглянемо основну систему, навантажену тільки одиничним моментом X_1 .

Визначаємо опорні реакції від дії одиничного моменту X_1 , розглядаючи балку АВ (рис. 3.36, е):

$$R_A = R_{B1} = \frac{X_1}{4} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від одиничного моменту \overline{M}_1 .

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис. 3.36, е):

$$M_1 = X_1 = 1,$$

$$M_2 = M_3 = R_{B1} \cdot 2 = 0,25 \cdot 2 = 0,50,$$

$$M_4 = M_5 = R_{B1} \cdot 1 = 0,25 \cdot 1 = 0,25,$$

$$M_6 = M_7 = M_8 = M_9 = M_{10} = 0.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту X_1 за характерними перерізами (див. рис. 3.36, е).

7 Розглянемо основну систему, навантажену тільки одиничним моментом X_2 .

Визначаємо опорні реакції від дії одиничного моменту X_2 , розглядаючи балку АВ (рис. 3.36, ж):

$$R_A = R_{B1} = \frac{X_2}{4} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Визначаємо опорні реакції від дії одиничного моменту X_2 , розглядаючи балку ВС (див. рис. 3.36, ж):

$$R_{B2} = R_C = \frac{X_2}{3} = \frac{1}{3} = 0,33.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від одиничного моменту $\overline{M_2}$.

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис. 3.36, ж):

$$M_1 = 0,$$

$$M_2 = M_3 = R_A \cdot 2 = 0,25 \cdot 2 = 0,50,$$

$$M_4 = M_5 = R_A \cdot 3 = 0,25 \cdot 3 = 0,75,$$

$$M_6 = M_7 = X_2 = 1,$$

$$M_8 = M_9 = X_2 - R_{B2} \cdot 1 = 1 - 0,33 \cdot 1 = 0,67,$$

$$M_{10} = 0.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту X_2 за характерними перерізами (див. рис. 3.36, ж).

8 Визначаємо коефіцієнти системи канонічних рівнянь, перемножуючи відповідні епюри, використовуючи формулу крайніх ординат:

$$\delta_{11} = \frac{4}{6EJ_x} (2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{1,33}{EJ_x},$$

$$\delta_{22} = \frac{4}{6EJ_x} (2 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{3}{6EJ_x} (2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{2,33}{EJ_x},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{4}{6EJ_x} (1 \cdot 1) = \frac{0,67}{EJ_x},$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{1p} &= \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 20 \cdot 0,50 + 20 \cdot 1,00) + \frac{10 \cdot 2^3}{24EJ_x} (1,00 + 0,50) + \\
&+ \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 20 \cdot 0,50 + 2 \cdot 20 \cdot 0,25 + 20 \cdot 0,25 + 20 \cdot 0,50) + \\
&+ \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 20 \cdot 0,25) = \frac{27,50}{EJ_x}, \\
\Delta_{2p} &= \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 20 \cdot 0,50) + \frac{10 \cdot 2^3}{24EJ_x} (0 + 0,50) + \\
&+ \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 20 \cdot 0,50 + 2 \cdot 20 \cdot 0,75 + 20 \cdot 0,75 + 20 \cdot 0,50) + \\
&+ \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 20 \cdot 0,75 + 20 \cdot 1,00) + \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 10 \cdot 0,67 + 10 \cdot 1,00) + \\
&+ \frac{2}{6EJ_x} (-2 \cdot 20 \cdot 0,67) = \frac{24,17}{EJ_x}.
\end{aligned}$$

9 Розв'язуємо систему канонічних рівнянь:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1,33}{EJ_x}X_1 + \frac{0,67}{EJ_x}X_2 + \frac{27,50}{EJ_x} = 0, \\ \frac{0,67}{EJ_x}X_1 + \frac{2,33}{EJ_x}X_2 + \frac{24,17}{EJ_x} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 1,33X_1 + 0,67X_2 + 27,50 = 0, \\ 0,67X_1 + 2,33X_2 + 24,17 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = \frac{-0,67X_2 - 27,50}{1,33}, \\ 0,67X_1 + 2,33X_2 + 24,17 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = -0,50X_2 - 20,68, \\ 0,67 \cdot (-0,50X_2 - 20,68) + 2,33X_2 + 24,17 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = -0,50X_2 - 20,68, \\ -0,34X_2 - 13,86 + 2,33X_2 + 24,17 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = -0,50X_2 - 20,68, \\ 1,99X_2 + 10,31 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = -0,50X_2 - 20,68, \\ X_2 = -5,21 \text{ кН}, \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = -18,02 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ X_2 = -5,21 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{cases}$$

10 Розглянемо еквівалентну систему, тобто статично визначувану основну систему, під дією заданого навантаження та знайдених моментів $X_1 = 18,02 \text{ кН} \cdot \text{м}$ та $X_2 = 5,21 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (рис. 3.36, и), будуюмо остаточні епюри внутрішніх силових факторів.

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження та знайдених моментів $X_1 = 18,02 \text{ кН} \cdot \text{м}$ та $X_2 = 5,21 \text{ кН} \cdot \text{м}$, розглядаючи балку АВ (рис. 3.38, а):

$$\sum M_A = 0,$$

$$-P \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 1 + X_1 - X_2 + R_{B1} \cdot 4 = 0,$$

$$R_{B1} = \frac{P \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 1 - X_1 + X_2}{4} = \frac{20 \cdot 3 + 10 \cdot 2 \cdot 1 - 18,02 + 5,21}{4} = 16,80 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$P \cdot 1 + q \cdot 2 \cdot 3 + X_1 - X_2 - R_A \cdot 4 = 0,$$

$$R_A = \frac{P \cdot 1 + q \cdot 2 \cdot 3 + X_1 - X_2}{4} = \frac{20 \cdot 1 + 10 \cdot 2 \cdot 3 + 18,02 - 5,21}{4} = 23,20 \text{ кН}.$$

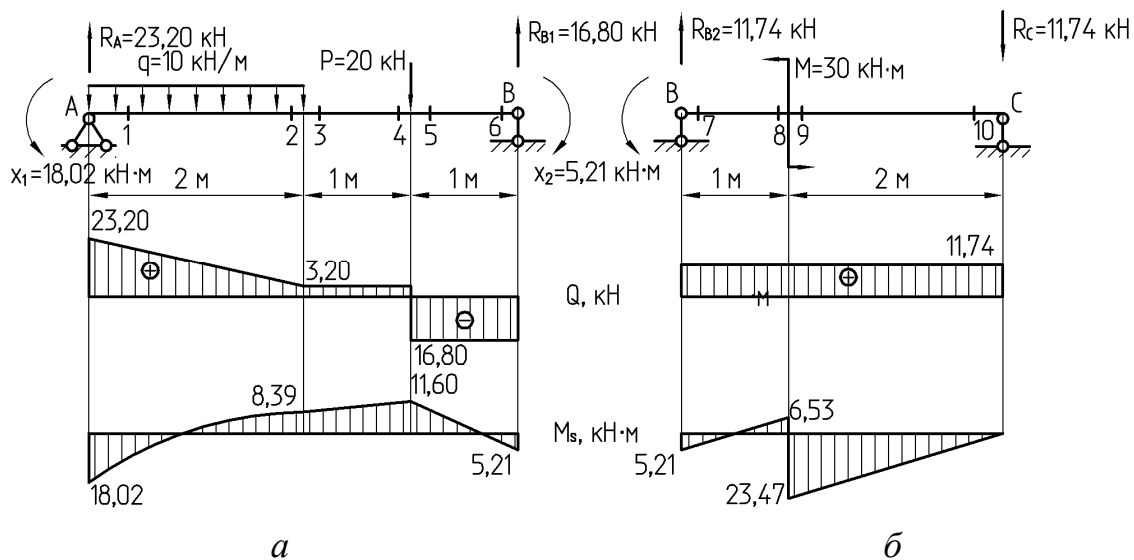


Рисунок 3.38

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$-P - q \cdot 2 + R_A + R_{B1} = 0,$$

$$-20 - 10 \cdot 2 + 23,20 + 16,80 = 0,$$

$$-40 + 40 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Обчислюємо значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$Q_1 = R_A = 23,20 \text{ кН},$$

$$Q_2 = Q_3 = Q_4 = R_A - q \cdot 2 = 23,20 - 10 \cdot 2 = 3,20 \text{ кН},$$

$$Q_5 = Q_6 = -R_{B1} = -16,80 \text{ кН}.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$M_1 = -X_1 = -18,02 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = -X_1 + R_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = -18,02 + 23,20 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 8,39 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = -X_2 = -5,21 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = M_5 = -X_2 + R_{B1} \cdot 1 = -5,21 + 16,80 \cdot 1 = 11,60 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження та знайдених моментів $X_1 = 18,02 \text{ кН} \cdot \text{м}$ та $X_2 = 5,21 \text{ кН} \cdot \text{м}$, розглядаючи балку ВС (рис. 3.38, б):

$$R_{B2} = R_C = \frac{M + X_2}{3} = \frac{30 + 5,21}{3} = 11,74 \text{ кН}.$$

Обчислюємо значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$Q_7 = Q_8 = Q_9 = Q_{10} = R_{B2} = 11,74 \text{ кН}.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$M_7 = -X_2 = -5,21 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_8 = -X_2 + R_{B2} \cdot 1 = -5,21 + 11,74 \cdot 1 = 6,53 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{10} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_9 = -R_C \cdot 2 = -11,74 \cdot 2 = -23,47 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюри поперечних сил Q (рис. 3.36, к) і згинальних моментів M_s (рис. 3.36, л) за характерними перерізами.

11 Виконуємо деформаційну перевірку. Якщо в заданій статично невизначуваній системі взаємний кут повороту на проміжних опорах дорівнює нулю, то добуток остаточної епюри згинальних моментів M_s на епюри \overline{M}_1 та \overline{M}_2 має дорівнювати нулю, тобто $\Delta_{1s} = 0$ та $\Delta_{2s} = 0$:

$$\begin{aligned}
\Delta_{1s} &= \frac{2}{6EJ_x} (-2 \cdot 18,02 \cdot 1,00 + 2 \cdot 8,39 \cdot 0,50 - 18,02 \cdot 0,50 + 8,39 \cdot 1,00) + \\
&\quad + \frac{10 \cdot 2^3}{24EJ_x} (1,00 + 0,50) + \\
&\quad + \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 8,39 \cdot 0,50 + 2 \cdot 11,60 \cdot 0,25 + 8,39 \cdot 0,25 + 11,60 \cdot 0,50) + \\
&\quad + \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 11,60 \cdot 0,25 - 5,21 \cdot 0,25) = \\
&= \frac{-9,42 + 5,00 + 3,68 + 0,75}{EJ_x} = \frac{-9,42 + 9,43}{EJ_x}.
\end{aligned}$$

При цьому похибка становила:

$$\frac{9,43 - 9,42}{9,42} \cdot 100\% = 0,1\%.$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{2s} &= \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 8,39 \cdot 0,50 - 18,02 \cdot 0,50) + \frac{10 \cdot 2^3}{24EJ_x} (0 + 0,50) + \\
&\quad + \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 8,39 \cdot 0,50 + 2 \cdot 11,60 \cdot 0,75 + 8,39 \cdot 0,75 + 11,60 \cdot 0,50) + \\
&\quad + \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 11,60 \cdot 0,75 - 2 \cdot 5,21 \cdot 1,00 + 11,60 \cdot 1,00 - 5,21 \cdot 0,75) + \\
&\quad + \frac{1}{6EJ_x} (-2 \cdot 5,21 \cdot 1,00 + 2 \cdot 6,53 \cdot 0,67 - 5,21 \cdot 0,67 + 6,53 \cdot 1,00) + \\
&\quad + \frac{2}{6EJ_x} (-2 \cdot 23,47 \cdot 0,67) = \frac{-0,21 + 1,67 + 6,31 + 2,45 + 0,23 - 10,48}{EJ_x} = \\
&= \frac{-10,69 + 10,66}{EJ_x}.
\end{aligned}$$

При цьому похибка становила:

$$\frac{10,69 - 10,66}{10,66} \cdot 100\% = 0,3\%.$$

12 Підбираємо поперечний переріз у вигляді двотавра.

При зазначеному навантаженні небезпечним перерізом є переріз 9, для якого $M_{\max} = M_9 = 23,47 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Розміри перерізу підбираємо з умови міцності на згинання:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Визначимо необхідний момент опору перерізу:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]},$$

$$W_x \geq \frac{23,47 \times 10^{-3}}{160} \times 10^6 = 147 \text{ см}^3.$$

Номер двотавра знаходимо за розрахунковим значенням моменту опору $W_x \geq 147 \text{ см}^3$. За таблицею сортаменту (ДСТУ 8239-72) вибираємо двотавр № 18а, для якого $W_x = 159 \text{ см}^3$, $J_x = 1430 \text{ см}^4$.

13 Визначаємо прогин у точці К.

Для цього до основної системи в точці К прикладаємо одиничну силу, тобто $P = 1$.

Визначаємо опорні реакції від дії одиничної сили, дорівнюючи нулю суми моментів усіх зовнішніх сил відносно точок А та В (рис. 3.36, м):

$$\sum M_A = 0,$$

$$-P \cdot 3 + R_B \cdot 4 = 0,$$

$$R_B = \frac{P \cdot 3}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4} = 0,75.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$P \cdot 1 - R_A \cdot 4 = 0,$$

$$R_A = \frac{P \cdot 1}{4} = \frac{1 \cdot 1}{4} = 0,25.$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$-P + R_A + R_B = 0,$$

$$-1 + 0,25 + 0,75 = 0,$$

$$-1 + 1 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах від дії одиничної сили (див. рис. 3.36, м):

$$M_1 = M_6 = M_7 = M_8 = M_9 = M_{10} = 0 \text{ м},$$

$$M_2 = M_3 = R_A \cdot 2 = 0,25 \cdot 2 = 0,50 \text{ м},$$

$$M_4 = M_5 = R_B \cdot 1 = 0,75 \cdot 1 = 0,75 \text{ м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничної сили за характерними перерізами (див. рис. 3.36, м).

З використанням формули крайніх ординат «перемножуємо між собою» на кожній ділянці остаточну епюру згинальних моментів M_s та епюру від дії одиничної сили \overline{M}_3 :

$$\begin{aligned} y_K = & \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 8,39 \cdot 0,50 - 18,02 \cdot 0,50) + \frac{10 \cdot 2^3}{24EJ_x} (0 + 0,50) + \\ & + \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 8,39 \cdot 0,50 + 2 \cdot 11,60 \cdot 0,75 + 8,39 \cdot 0,75 + 11,60 \cdot 0,50) + \\ & + \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 11,60 \cdot 0,75 - 5,21 \cdot 0,75) = \frac{10,01}{EJ_x}. \end{aligned}$$

Прогин у точці К дорівнює:

$$y_K = \frac{10,01 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 1430 \times 10^{-8}} = 0,0035 \text{ м}.$$

Допустимий прогин балки довжиною $\ell = 7 \text{ м}$ дорівнює:

$$[y] = \frac{\ell}{200} = \frac{7}{200} = 0,035 \text{ м}.$$

Якщо прогин у точці К менше, ніж допустимий прогин для балки, то жорсткість балки забезпечена.

14 Визначаємо кут повороту перерізу В.

Для цього до основної системи в перерізі В прикладаємо одиничний момент, тобто $M = 1$.

Визначаємо опорні реакції від дії одиничного моменту $M = 1$, розглядаючи балку ВС (рис. 3.36, н):

$$R_{B2} = R_C = \frac{M}{3} = \frac{1}{3} = 0,33.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис. 3.36, н):

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = M_6 = 0,$$

$$M_7 = M = 1,$$

$$M_8 = M_9 = X_2 - R_{B2} \cdot 1 = 1 - 0,33 \cdot 1 = 0,67,$$

$$M_{10} = 0.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту за характерними перерізами (див. рис. 3.36, н).

З використанням формули крайніх ординат «перемножуємо між собою» на кожній ділянці остаточну епюру згинальних моментів M_s та епюру від дії одиничного моменту \overline{M}_4 :

$$\begin{aligned} \theta_B = \frac{1}{6EJ_x} & (-2 \cdot 5,21 \cdot 1,00 + 2 \cdot 6,53 \cdot 0,67 - 5,21 \cdot 0,67 + 6,53 \cdot 1,00) + \\ & + \frac{2}{6EJ_x} (-2 \cdot 23,47 \cdot 0,67) = \frac{-8,54}{EJ_x}. \end{aligned}$$

Кут повороту перерізу В дорівнює:

$$\theta_B = \frac{-8,54 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 1430 \times 10^{-8}} = -0,0030 \text{ рад.}$$

Допустимий кут повороту перерізу дорівнює:

$$[\theta] = 2^\circ = 0,0349 \text{ рад.}$$

Якщо повороту перерізу В менше, ніж допустимий кут повороту, то жорсткість рами забезпечена.

Задача 3.8

Для балки, яка подана на рисунку 3.39, необхідно:

- 1) розкрити статичну невизначуваність;
- 2) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів;
- 3) підібрати переріз у вигляді двотавра, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$;
- 4) визначити прогин у точці К;
- 5) визначити кут повороту перерізу С.

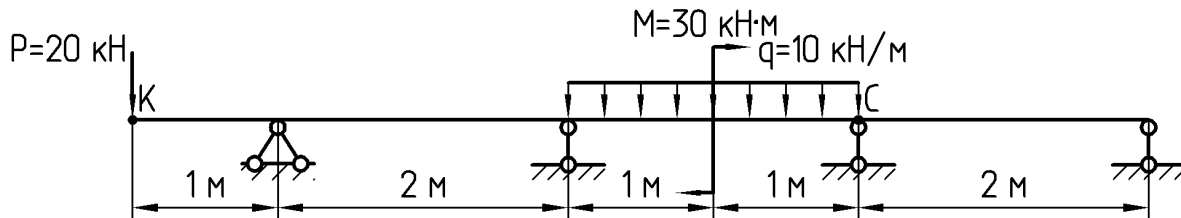


Рисунок 3.39

Розв'язання

1 Встановлюємо ступінь статичної невизначуваності системи (рис. 3.40, а). Дана система два рази статично не визначувана.

2 Вибираємо основну систему. Проміжні опори заміняємо врізаними шарнірами (рис. 3.40, б).

3 Одержуємо еквівалентну систему, завантажуючи основну систему заданим навантаженням і невідомими згинальними моментами X_1 та X_2 (рис. 3.40, в). Таким чином, еквівалентна система являє собою три прості шарнірно оперті балки, навантажені заданим навантаженням і невідомими згинальними моментами X_1 та X_2 , що заміняють відкинуті зв'язки між сусідніми прольотами.

4 Для того щоб визначити невідомі згинальні моменти X_1 та X_2 , скористаємося системою канонічних рівнянь:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases}$$

5 Розглянемо основну систему, навантажену тільки заданим навантаженням (рис. 3.40, г).

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження, розглядаючи балку АВ (рис. 3.41, а):

$$\sum M_A = 0,$$

$$P \cdot 1 - R_{B1} \cdot 2 = 0,$$

$$R_{B1} = \frac{P \cdot 1}{2} = \frac{20 \cdot 1}{2} = 10 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$P \cdot 3 - R_A \cdot 2 = 0,$$

$$R_A = \frac{P \cdot 3}{2} = \frac{20 \cdot 3}{2} = 30 \text{ кН}$$

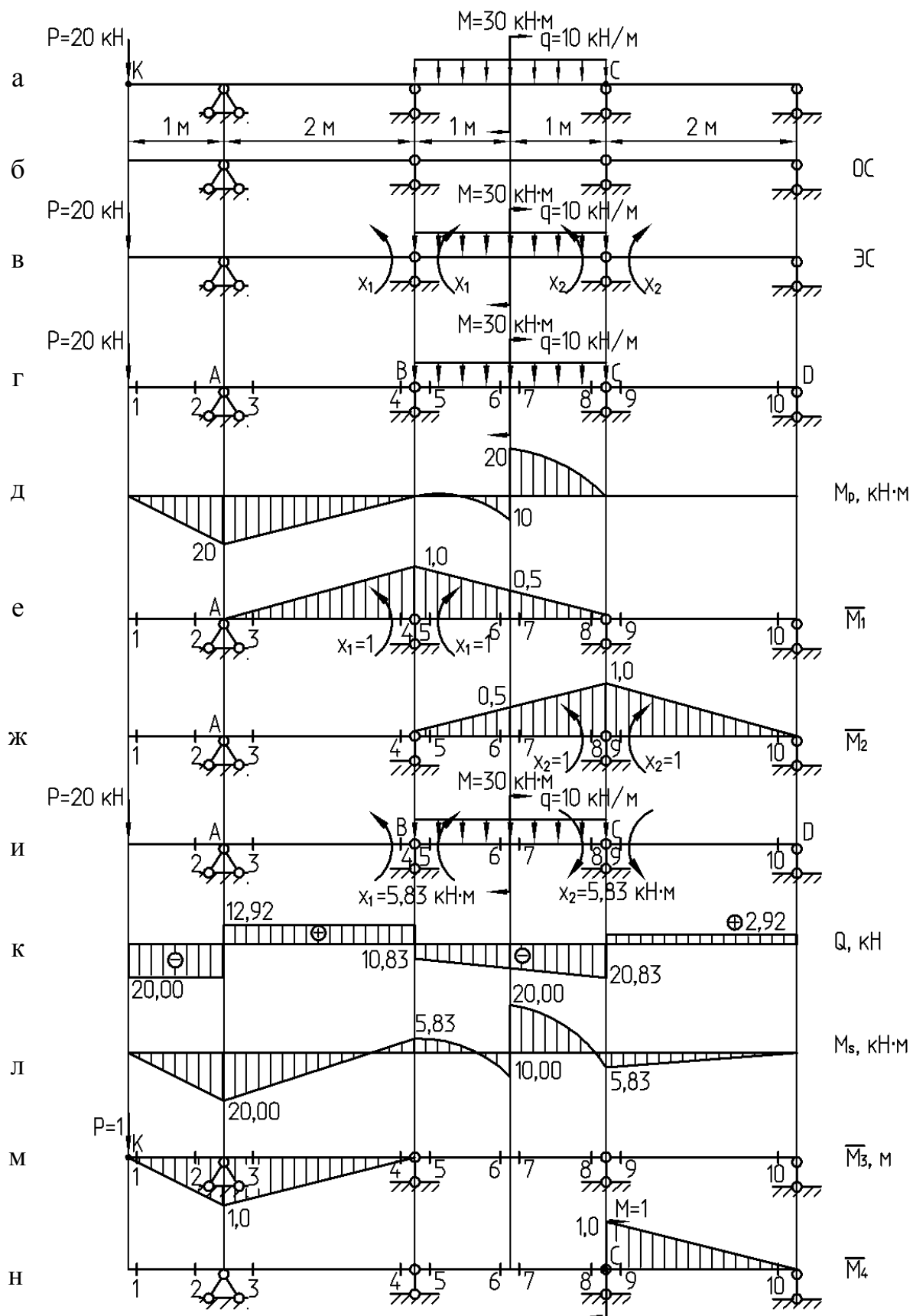


Рисунок 3.40

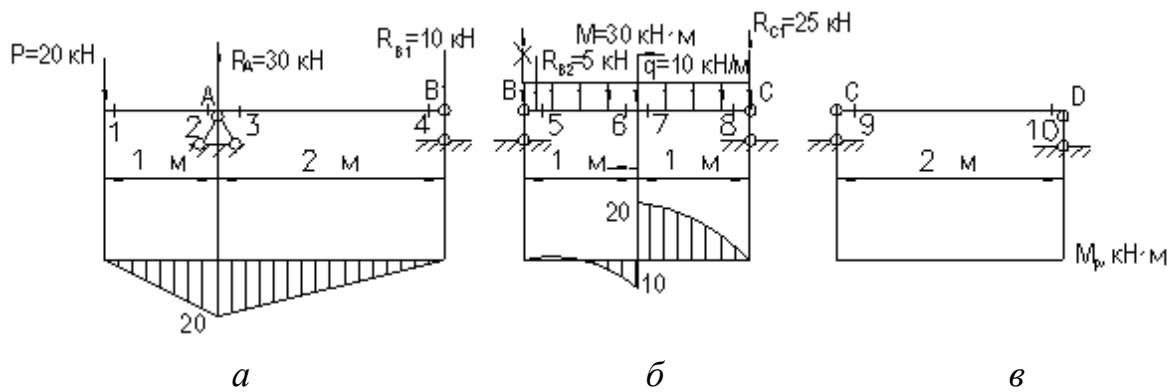


Рисунок 3.41

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$\begin{aligned} -P + R_A - R_{B1} &= 0, \\ -20 + 30 - 10 &= 0, \\ -30 + 30 &= 0, \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження M_p для балки АВ, обчислюючи значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис. 3.41, а):

$$\begin{aligned} M_1 = M_4 &= 0 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M_2 = M_3 &= -P \cdot 1 = -20 \cdot 1 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження, розглядаючи балку ВС (рис. 3.41, б):

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0, \\ -M - q \cdot 2 \cdot 1 + R_{C1} \cdot 2 &= 0, \\ R_{C1} &= \frac{M + q \cdot 2 \cdot 1}{2} = \frac{30 + 10 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 25 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_C &= 0, \\ -M + q \cdot 2 \cdot 1 - R_{B2} \cdot 2 &= 0, \\ R_{B2} &= \frac{-M + q \cdot 2 \cdot 1}{2} = \frac{-30 + 10 \cdot 2 \cdot 1}{2} = -5 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$\begin{aligned}
 -q \cdot 2 + R_{B2} + R_{C1} &= 0, \\
 -10 \cdot 2 + 25 - 5 &= 0, \\
 -25 + 25 &= 0, \\
 0 &= 0.
 \end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження M_p для балки ВС, обчислюючи значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис. 3.41, б):

$$\begin{aligned}
 M_5 &= M_8 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\
 M_6 &= -R_{B2} \cdot 1 - q \cdot 1 \cdot 0,5 = -5 \cdot 1 - 10 \cdot 1 \cdot 0,5 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\
 M_7 &= -R_{B2} \cdot 1 - q \cdot 1 \cdot 0,5 + M = M_6 + M = -10 + 30 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}.
 \end{aligned}$$

Якщо задане навантаження на балці CD відсутній, то

$$M_9 = M_{10} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії заданого навантаження за характерними перерізами (див. рис. 3.40, д).

6 Розглянемо основну систему, навантажену тільки одиничним моментом X_1 . Визначаємо опорні реакції від дії одиничного моменту X_1 , розглядаючи балку АВ (рис. 3.40, е):

$$R_A = R_{B1} = \frac{X_1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Визначаємо опорні реакції від дії одиничного моменту X_1 , розглядаючи балку ВС (див. рис. 3.40, е):

$$R_{B2} = R_{C1} = \frac{X_1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від одиничного моменту $\overline{M_1}$. Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис. 3.40, е):

$$\begin{aligned}
 M_1 &= M_2 = M_3 = 0, \\
 M_4 &= M_5 = X_1 = 1, \\
 M_6 &= M_7 = R_{C1} \cdot 1 = 0,5 \cdot 1 = 0,5, \\
 M_8 &= M_9 = M_{10} = 0.
 \end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту X_1 за характерними перерізами (див. рис. 3.40, е).

7 Розглянемо основну систему, навантажену тільки одиничним моментом X_2 .

Визначаємо опорні реакції від дії одиничного моменту X_2 , розглядаючи балку ВС (рис. 3.40, ж):

$$R_{B2} = R_{C1} = \frac{X_2}{2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Визначаємо опорні реакції від дії одиничного моменту X_2 , розглядаючи балку CD (див. рис. 3.40, ж):

$$R_{C1} = R_D = \frac{X_2}{2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від одиничного моменту \overline{M}_2 .

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис. 3.40, ж):

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = 0,$$

$$M_6 = M_7 = R_{B2} \cdot 1 = 0,5 \cdot 1 = 0,5,$$

$$M_8 = M_9 = X_2 = 1,$$

$$M_{10} = 0.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту X_2 за характерними перерізами (див. рис. 3.40, ж).

8 Визначаємо коефіцієнти системи канонічних рівнянь, перемножуючи відповідні епюри, використовуючи формулу крайніх ординат:

$$\delta_{11} = \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{1,33}{EJ_x},$$

$$\delta_{22} = \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{1,33}{EJ_x},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2}{6EJ_x} (1 \cdot 1) = \frac{0,33}{EJ_x},$$

$$\Delta_{1p} = \frac{2}{6EJ_x} (-20 \cdot 1,0) + \frac{1}{6EJ_x} (-2 \cdot 10 \cdot 0,5 - 10 \cdot 1,0) + \frac{10 \cdot 1^3}{24EJ_x} (1,0 + 0,5) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 20 \cdot 0,5) + \frac{10 \cdot 1^3}{24EJ_x} (0,5 + 0,0) = \frac{-5,83}{EJ_x}, \\
\Delta_{2p} &= \frac{1}{6EJ_x} (-2 \cdot 10 \cdot 0,5) + \frac{10 \cdot 1^3}{24EJ_x} (0,0 + 0,5) + \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 20 \cdot 0,5 + 20 \cdot 1,0) + \\
& + \frac{10 \cdot 1^3}{24EJ_x} (0,5 + 1,0) = \frac{5,83}{EJ_x}.
\end{aligned}$$

9 Розв'язуємо систему канонічних рівнянь:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1,33}{EJ_x}X_1 + \frac{0,33}{EJ_x}X_2 + \frac{-5,83}{EJ_x} = 0, \\ \frac{0,33}{EJ_x}X_1 + \frac{1,33}{EJ_x}X_2 + \frac{5,83}{EJ_x} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 1,33X_1 + 0,33X_2 - 5,83 = 0, \\ 0,33X_1 + 1,33X_2 + 5,83 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = \frac{-0,33X_2 + 5,83}{1,33}, \\ 0,33X_1 + 1,33X_2 + 5,83 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = -0,25X_2 + 4,38, \\ 0,33 \cdot (-0,25X_2 + 4,38) + 1,33X_2 + 5,83 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = -0,25X_2 + 4,38, \\ -0,08X_2 + 1,45 + 1,33X_2 + 5,83 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = -0,25X_2 + 4,38, \\ 1,25X_2 + 7,28 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = -0,25X_2 + 4,38, \\ X_2 = -5,83 \text{ кН}, \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = 5,83 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ X_2 = -5,83 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{cases}$$

10 Розглянемо еквівалентну систему, тобто статично визначувану основну систему, під дією заданого навантаження та знайдених моментів $X_1 = 5,83 \text{ кН} \cdot \text{м}$ та $X_2 = 5,83 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (рис. 3.40, и), будуємо остаточні епюри внутрішніх силових факторів.

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження та знайдених моментів $X_1 = 5,83 \text{ кН} \cdot \text{м}$ та $X_2 = 5,83 \text{ кН} \cdot \text{м}$, розглядаючи балку АВ (рис. 3.42, а):

$$\sum M_A = 0,$$

$$P \cdot 1 + X_1 - R_{B1} \cdot 2 = 0,$$

$$R_{B1} = \frac{P \cdot 1 + X_1}{2} = \frac{20 \cdot 1 + 5,83}{2} = 12,92 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$P \cdot 3 + X_1 - R_A \cdot 2 = 0,$$

$$R_A = \frac{P \cdot 3 + X_1}{2} = \frac{20 \cdot 3 + 5,83}{2} = 32,92 \text{ кН}.$$

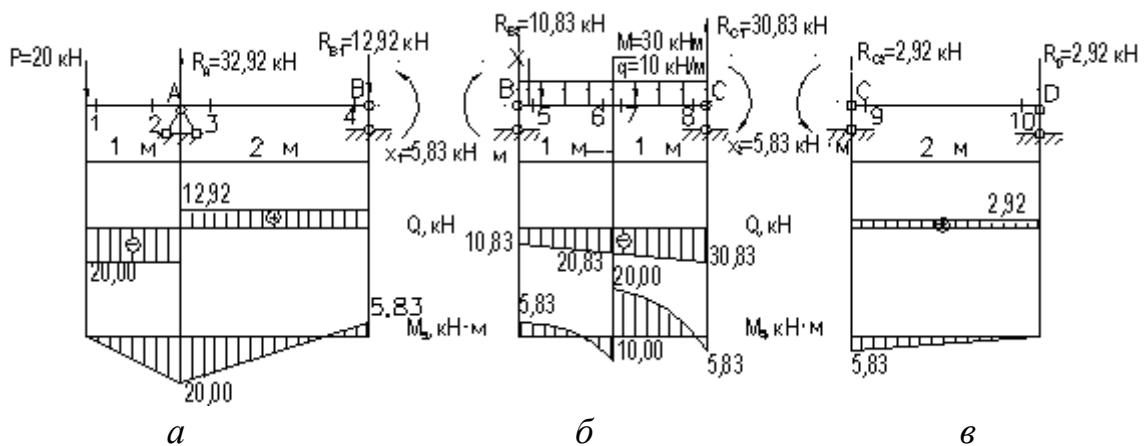


Рисунок 3.42

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$.

$$-P + R_A - R_{B1} = 0,$$

$$-20 + 32,92 - 12,92 = 0,$$

$$-30,92 + 32,92 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Обчислюємо значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$Q_1 = Q_2 = -R_A = -20,00 \text{ кН},$$

$$Q_3 = Q_4 = R_{B1} = 12,92 \text{ кН}.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$M_1 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = -P \cdot 1 = -20 \cdot 1 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = X_1 = 5,83 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження та знайдених моментів $X_1 = 5,83 \text{ кН} \cdot \text{м}$ та $X_2 = 5,83 \text{ кН} \cdot \text{м}$, розглядаючи балку ВС (рис. 3.42, б):

$$\sum M_B = 0,$$

$$-M - q \cdot 2 \cdot 1 - X_1 - X_2 + R_{C1} \cdot 2 = 0,$$

$$R_{C1} = \frac{M + q \cdot 2 \cdot 1 + X_1 + X_2}{2} = \frac{30 + 10 \cdot 2 \cdot 1 + 5,83 + 5,83}{2} = 30,83 \text{ кН}.$$

$$\sum M_C = 0,$$

$$-M + q \cdot 2 \cdot 1 - X_1 - X_2 - R_{B2} \cdot 2 = 0,$$

$$R_{B2} = \frac{-M + q \cdot 2 \cdot 1 - X_1 - X_2}{2} = \frac{-30 + 10 \cdot 2 \cdot 1 - 5,83 - 5,83}{2} = -10,83 \text{ кН}.$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$-q \cdot 2 + R_{B2} + R_{C1} = 0,$$

$$-10 \cdot 2 + 30,83 - 10,83 = 0,$$

$$-30,83 + 30,83 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Обчислюємо значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$Q_5 = -R_{B2} = -10,83 \text{ кН},$$

$$Q_6 = Q_7 = -R_{B2} - q \cdot 1 = -10,83 - 10 \cdot 1 = -20,83 \text{ кН},$$

$$Q_8 = -R_{C1} = -30,83 \text{ кН}.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$M_5 = X_1 = 5,83 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = X_1 - R_{B2} \cdot 1 - q \cdot 1 \cdot 0,5 = 5,83 - 10,83 \cdot 1 - 10 \cdot 1 \cdot 0,5 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_7 = X_1 - R_{B2} \cdot 1 - q \cdot 1 \cdot 0,5 + M = M_6 + M = -10 + 30 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_8 = -X_2 = -5,83 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження та знайдених моментів $X_1 = 5,83 \text{ кН} \cdot \text{м}$ та $X_2 = 5,83 \text{ кН} \cdot \text{м}$, розглядаючи балку CD (рис. 3.42, в):

$$R_{C2} = R_D = \frac{X_2}{2} = \frac{5,83}{2} = 2,92 \text{ кН}.$$

Обчислюємо значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$Q_9 = Q_9 = R_{C2} = 2,92 \text{ кН}.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$M_9 = -X_2 = -5,83 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{10} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюри поперечних сил Q (рис. 3.40, к) і згинальних моментів M_s (рис. 3.40, л) за характерними перерізами.

11 Виконуємо деформаційну перевірку. Якщо в заданій статично невизначуваній системі взаємний кут повороту на проміжних опорах дорівнює нулю, то добуток остаточної епюри згинальних моментів M_s на епюри \overline{M}_1 та \overline{M}_2 має дорівнювати нулю, тобто $\Delta_{1s} = 0$ та $\Delta_{2s} = 0$:

$$\begin{aligned} \Delta_{1s} &= \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 5,83 \cdot 1,0 - 20 \cdot 1,0) + \\ &+ \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 5,83 \cdot 1,0 - 2 \cdot 10,00 \cdot 0,5 + 5,83 \cdot 0,5 - 10,00 \cdot 1,0) + \\ &+ \frac{10 \cdot 1^3}{24EJ_x} (1,0 + 0,5) + \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 20 \cdot 0,5 - 5,83 \cdot 0,5) + \frac{10 \cdot 1^3}{24EJ_x} (0,5 + 0,0) = \\ &= \frac{-2,78 - 0,90 + 0,63 + 2,85 + 0,21}{EJ_x} = \frac{-3,68 + 3,69}{EJ_x}. \end{aligned}$$

При цьому похибка становила:

$$\frac{3,69 - 3,68}{3,68} \cdot 100\% = 0,3 \, \%.$$

$$\Delta_{2s} = \frac{1}{6EJ_x} (-2 \cdot 10 \cdot 0,5 + 5,83 \cdot 0,5) + \frac{10 \cdot 1^3}{24EJ_x} (0,0 + 0,5) +$$

$$+ \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 20 \cdot 0,5 - 2 \cdot 5,83 \cdot 1,0 + 20 \cdot 1,0 - 5,83 \cdot 0,5) + \frac{10 \cdot 1^3}{24EJ_x} (0,5 + 1,0) +$$

$$+ \frac{2}{6EJ_x} (-2 \cdot 5,83 \cdot 1,0) = \frac{-1,18 + 0,21 + 4,24 + 0,63 - 3,89}{EJ_x} = \frac{-5,07 + 5,08}{EJ_x}.$$

При цьому похибка становила:

$$\frac{5,08 - 5,07}{5,07} \cdot 100\% = 0,2\%.$$

12 Підбираємо поперечний переріз у вигляді двотавра.

При зазначеному навантаженні небезпечним перерізом є переріз 2, для якого $M_{\max} = M_2 = 20,00 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Розміри перерізу підбираємо з умови міцності на згинання:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Визначимо необхідний момент опору перерізу:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]},$$

$$W_x \geq \frac{20,00 \times 10^{-3}}{160} \times 10^6 = 125 \text{ см}^3.$$

Номер двотавра знаходимо за розрахунковим значенням моменту опору $W_x \geq 125 \text{ см}^3$. За таблицею сортаменту (ДСТУ 8239-72) вибираємо двотавр № 18, для якого $W_x = 143 \text{ см}^3$, $J_x = 1290 \text{ см}^4$.

13 Визначаємо прогин у точці К.

Для цього до основної системи в точці К прикладаємо одиничну силу, тобто $P = 1$.

Визначаємо опорні реакції від одиничної сили $P = 1$, розглядаючи балку АВ (рис. 3.40, м):

$$\sum M_A = 0,$$

$$P \cdot 1 - R_{B1} \cdot 2 = 0,$$

$$R_{B1} = \frac{P \cdot 1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2} = 0,5.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$P \cdot 3 - R_A \cdot 2 = 0,$$

$$R_A = \frac{P \cdot 3}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2} = 1,5.$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$-P + R_A - R_{B1} = 0,$$

$$-1 + 1,5 - 0,5 = 0,$$

$$-1,5 + 1,5 = 0.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах від дії одиничної сили (див. рис. 3.40, м):

$$M_1 = 0 \text{ м},$$

$$M_2 = M_3 = -P \cdot 1 = -1 \cdot 1 = -1,0 \text{ м},$$

$$M_4 = M_5 = M_6 = M_7 = M_8 = M_9 = M_{10} = 0 \text{ м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничної сили за характерними перерізах (див. рис. 3.40, м).

З використанням формули крайніх ординат «перемножуємо між собою» на кожній ділянці остаточну епюру згинальних моментів M_s та епюру від дії одиничної сили \overline{M}_3 :

$$y_K = \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 20,00 \cdot 1,0) + \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 20,00 \cdot 1,0 - 5,83 \cdot 1,0) = \frac{18,06}{EJ_x}.$$

Прогин у точці К дорівнює:

$$y_K = \frac{18,06 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 1290 \times 10^{-8}} = 0,0070 \text{ м}.$$

Допустимий прогин балки довжиною $\ell = 7 \text{ м}$ дорівнює:

$$[y] = \frac{\ell}{200} = \frac{7}{200} = 0,035 \text{ м.}$$

Якщо прогин у точці К менше, ніж допустимий прогин для балки, то жорсткість балки забезпечена.

14 Визначаємо кут повороту перерізу С.

Для цього до основної системи в перерізі С прикладаємо одиничний момент, тобто $M = 1$.

Визначаємо опорні реакції від дії одиничного моменту $M = 1$, розглядаючи балку CD (рис. 3.40, н):

$$R_{C1} = R_D = \frac{M}{2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис. 3.40, н):

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = M_6 = M_7 = M_8 = 0,$$

$$M_9 = M = 1,$$

$$M_{10} = 0.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту за характерними перерізами (див. рис. 3.40, н).

З використанням формули крайніх ординат «перемножуємо між собою» на кожній ділянці остаточну епюру згинальних моментів M_s та епюру від дії одиничного моменту \overline{M}_3 :

$$\theta_C = \frac{2}{6EJ_x}(-2 \cdot 5,83 \cdot 1,0) = \frac{-3,89}{EJ_x} = \frac{-3,89 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 1290 \times 10^{-8}} = -0,0015 \text{ рад.}$$

Якщо кут повороту перерізу С менше, ніж допустимий кут повороту $[\theta] = 2^\circ = 0,0349 \text{ рад}$, то жорсткість рами забезпечена.

4 СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТРИЖНІВ

Стійкістю називають здатність конструкції або її елементів зберігати певну початкову форму пружної рівноваги.

Згинання стрижня, пов'язане зі втратою стійкості прямолінійної форми його рівноваги, називають поздовжнім згинанням (рис. 4.1).

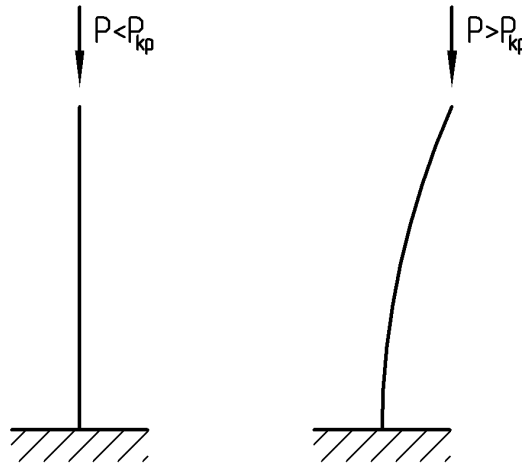


Рисунок 4.1

Найбільше значення прикладеної по центру стискуючої сили, до якого прямолінійна форма рівноваги стрижня стійка, називається критичним.

Розрахунок на стійкість повинен забезпечити роботу елемента конструкції при початковій формі його пружної рівноваги, тобто при навантаженнях, менше критичних. Причому, фактично діюча стискаюча сила, що допускається, повинна бути в деяку кількість раз менше критичної:

$$[P] = \frac{P_{кр}}{[n_{ст}]}, \quad (4.1)$$

де $[P]$ – допустиме значення сили, що стискає стрижень;

$P_{кр}$ – критичне значення стискуючої сили для стрижня, яку розраховують;

$[n_{ст}]$ – заданий (необхідний) коефіцієнт запасу стійкості.

Нормальне напруження в поперечному перерізі стиснутого стрижня, що відповідає критичному значенню стискуючої сили, теж називають критичним:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F}, \quad (4.2)$$

де F – площа поперечного перерізу.

Відношення зведеної довжини стрижня $\mu\ell$ до мінімального радіуса інерції його поперечного перерізу i_{\min} називають гнучкістю стрижня:

$$\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{\min}}. \quad (4.3)$$

де i_{\min} – мінімальний радіус інерції перерізу;
 μ – коефіцієнт поздовжнього згинання або коефіцієнт зведення довжини, що залежить від умов закріплення кінців стрижня;
 ℓ – довжина стрижня.

Мінімальний радіус інерції визначають за наступною формулою:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}}. \quad (4.4)$$

де J_{\min} – найменший момент інерції перерізу;

Також вводять поняття граничної гнучкості, що залежить тільки від механічних властивостей матеріалу стрижня та не залежить від його розмірів:

$$\lambda_{\text{гр}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пц}}}}, \quad (4.5)$$

де $\sigma_{\text{пц}}$ – границя пропорційності.

Залежно від гнучкості стрижні умовно поділяють на три категорії:

1 Стрижні великої гнучкості $\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$, для яких розрахунок на стійкість ведеться за формулою Ейлера

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu\ell)^2}, \quad (4.6)$$

Значення коефіцієнта зведення довжини для випадків закріплення кінців стрижня, які найчастіше зустрічаються, наведені на рисунку 4.2.

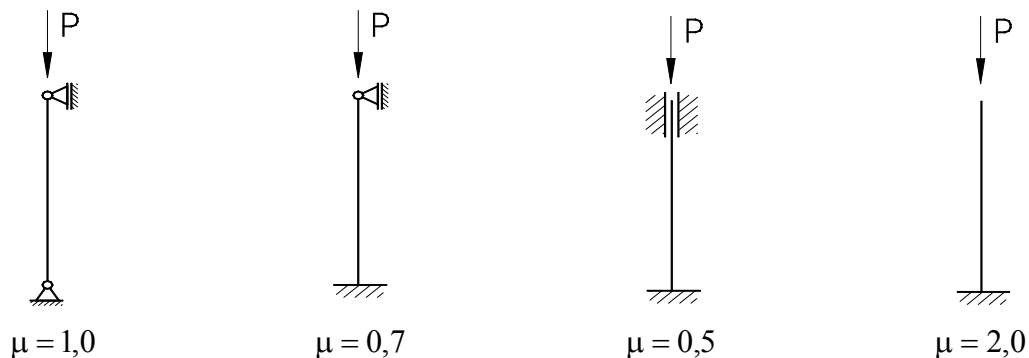


Рисунок 4.2

2 Стрижні середньої гнучкості $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_{\text{пред}}$, які розраховують на стійкість за емпіричною формулою Ф. С. Ясинського:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda, \quad (4.7)$$

де a та b – коефіцієнти, які визначені дослідним шляхом. Вони постійні для даного матеріалу.

Значення коефіцієнтів a та b , а також значення гнучкості, при яких застосовна формула (4.7), наведені в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Значення коефіцієнтів a та b , а також значення гнучкості, при яких застосовна формула (4.7)

Матеріал	a , МПа	b , МПа	λ_0	$\lambda_{\text{пред}}$
Сталь:				
Ст2	264	0,70	60	105
Ст3	310	1,14	60	100
20, Ст4	328	1,15	60	96
45	449	1,67	52	85
Дюралуміній Д16Т	406	1,83	30	53

3 Стрижні малої гнучкості $\lambda < \lambda_0$, які розраховують не на стійкість, а на міцність. Для них критичне напруження вважається постійним:

$$\sigma_{\text{кр}} = \sigma_T.$$

Умова стійкості має вигляд:

$$\sigma = \frac{P}{\phi F} \leq [\sigma], \quad (4.8)$$

де ϕ – коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження ($\phi = 0 \dots 1$), значення якого для різних матеріалів і гнучкості подані в додатку Д

При проектувальному розрахунку в розрахунковій формулі на стійкість (4.8) є дві невідомі величини – коефіцієнт ϕ і шукана площа F . Тому при підборі перерізів доводиться користуватися методом послідовних наближень, варіюючи величину коефіцієнта ϕ . У першій спробі беруть $\phi_1 = 0,5$ і визначають необхідну площу F , підбирають переріз. Підібраний переріз перевіряють і встановлюють фактичне значення ϕ_2 . Визначають фактичне напруження та порівнюють його із допустимим значенням. Якщо

фактична напруження значно відрізняється від допустимої, то розрахунок повторюють, прийнявши середнє за величиною значення між φ_1 та φ_2 :

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Алгоритм проектувального розрахунку поданий у вигляді схеми на рисунку 4.3.

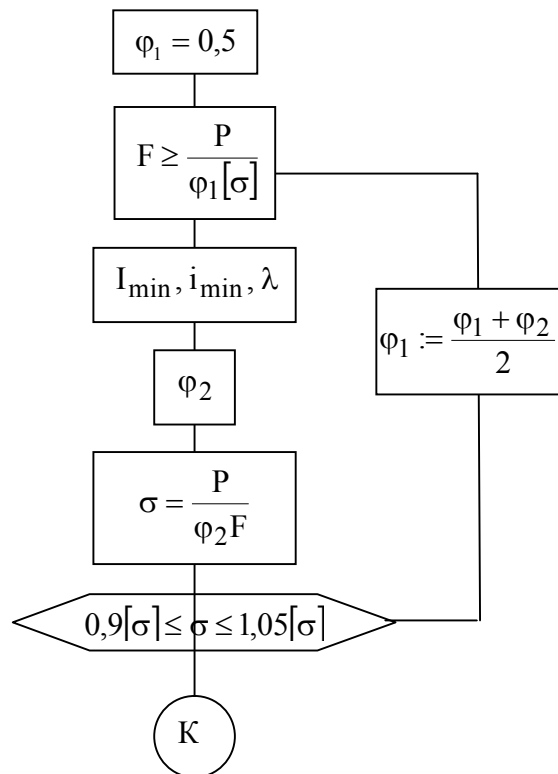


Рисунок 4.3

Задача 4.1

Визначити величину критичних сил і напружень для стояка, який зображений на рисунку 4.4, а, прямокутного поперечного перерізу $4 \times 8 \text{ см}^2$ (рис. 4.4, б). Матеріал стояка – сталь Ст. 3 з границею пропорційності $\sigma_{\text{пц}} = 200 \text{ МПа}$ та границею текучості $\sigma_{\text{Т}} = 240 \text{ МПа}$. Довжина стояка може бути: $\ell_1 = 2,5 \text{ м}$, $\ell_2 = 1,25 \text{ м}$, $\ell_3 = 0,625 \text{ м}$.

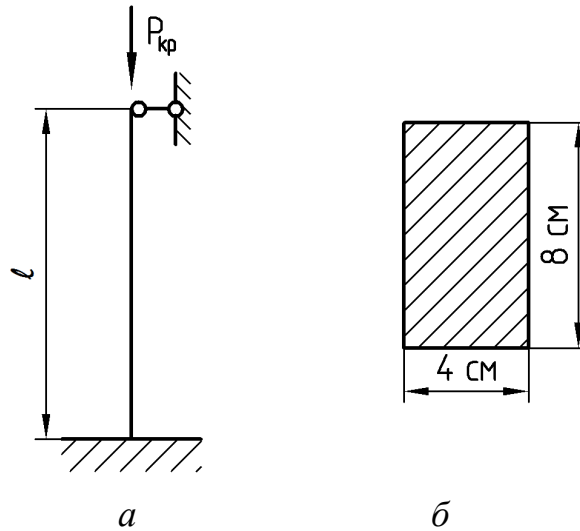


Рисунок 4.4

Розв'язання

1 Визначаємо граничну гнучкість стрижня:

$$\lambda_{\text{гр}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пц}}}} = 3,14 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{200}} = 100.$$

Визначаємо гнучкість λ_0 за формулою

$$\lambda_0 = \frac{a - \sigma_{\text{T}}}{b}.$$

Для сталі Ст. 3 $a = 310$ МПа , $b = 1,14$ МПа , отже,

$$\lambda_0 = \frac{a - \sigma_{\text{T}}}{b} = \frac{310 - 240}{1,14} = 61,4.$$

2 Визначаємо геометричні характеристики перерізу:

- площа поперечного перерізу – $F = bh = 4 \cdot 8 = 32 \text{ см}^2$,
- мінімальний момент інерції – $J_{\text{min}} = \frac{bh^3}{12} = \frac{8 \cdot 4^3}{12} = 42,7 \text{ см}^4$,
- мінімальний радіус інерції – $i_{\text{min}} = \sqrt{\frac{J_{\text{min}}}{F}} = \sqrt{\frac{42,7}{32}} = 1,16 \text{ см}.$

4 Визначаємо гнучкість стрижня за формулою

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\text{min}}}.$$

При зазначеному виді закріплення $\mu = 0,7$.

Отже, гнучкість стояка при різній довжині стрижня дорівнює:

$$\lambda_1 = \frac{\mu \ell_1}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 250}{1,16} = 150,9,$$

$$\lambda_2 = \frac{\mu \ell_2}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 125}{1,16} = 75,4,$$

$$\lambda_3 = \frac{\mu \ell_3}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 62,5}{1,16} = 37,7.$$

4 Визначаємо критичну силу та критичне напруження для стояка з довжиною $\ell_1 = 2,5$ м.

Якщо $\lambda_1 \geq \lambda_{\text{пред}}$ ($150,9 > 100,0$), то цей стояк – це стрижень великої гнучкості, тому критична сила визначається за формулою Ейлера:

$$P_{\text{кр}1} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu \ell)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \times 10^5 \cdot 42,7 \times 10^{-8}}{(0,7 \cdot 2,5)^2} = 0,275 \text{ МН} = 275 \text{ кН},$$

$$\sigma_{\text{кр}1} = \frac{P_{\text{кр}1}}{F} = \frac{275 \times 10^{-3}}{32 \times 10^{-4}} = 85,9 \text{ МПа}.$$

5 Визначаємо критичну силу та критичне напруження для стояка з довжиною $\ell_2 = 1,25$ м.

Якщо $\lambda_0 \leq \lambda_2 < \lambda_{\text{пред}}$ ($61,4 < 75,4 < 100$), то цей стояк – це стрижень середньої гнучкості, тому критичне напруження визначається за формулою Ф. С. Ясинського

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda.$$

Отже,

$$\sigma_{\text{кр}2} = 310 - 1,14 \cdot 75,4 = 224,0 \text{ МПа},$$

$$P_{\text{кр}2} = \sigma_{\text{кр}2} F = 224,0 \cdot 32 \times 10^{-4} = 0,717 \text{ МН} = 717 \text{ кН}.$$

6 Визначаємо критичну силу та критичне напруження для стояка з довжиною $\ell_3 = 0,625$ м.

Якщо $\lambda < \lambda_0$ ($37,7 < 61,4$), то цей стояк – це стрижень малої гнучкості, тому критичне напруження вважається постійним, тобто:

$$\sigma_{\text{кр}3} = \sigma_T = 240 \text{ МПа},$$

$$P_{\text{кр}3} = \sigma_{\text{кр}3} F = 240,0 \cdot 32 \times 10^{-4} = 0,768 \text{ МН} = 768 \text{ кН}.$$

Задача 4.2

Визначити допустиме навантаження на стрижень, який зображений на рисунку 4.5, а, поперечний переріз – двотавр № 14 (рис. 4.5, б). Матеріал стрижня – сталь Ст. 3 з границею пропорційності $\sigma_{\text{пл}} = 200$ МПа. Необхідний коефіцієнт запасу стійкості $[n_{\text{ст}}] = 3,0$.

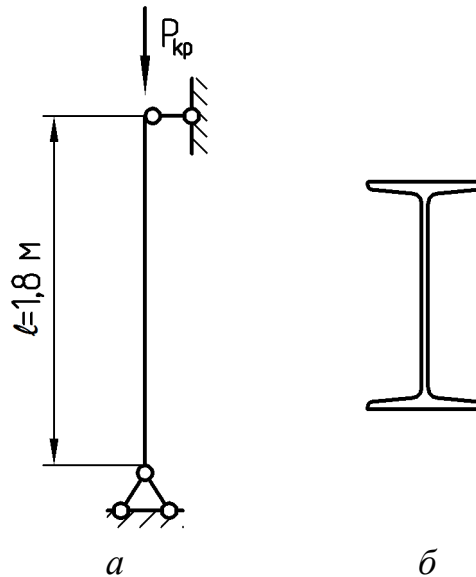


Рисунок 4.5

Розв'язання

1 Визначаємо граничну гнучкість стрижня:

$$\lambda_{\text{ао}} = \pi \sqrt{\frac{A}{\sigma_{\text{ю}}}} = 3,14 \cdot \sqrt{\frac{2 \times 10^5}{200}} = 100.$$

2 Із сортаменту (додаток А) виписуємо геометричні характеристики двотавра № 14:

- мінімальний момент інерції $J_{\text{min}} = 41,9 \text{ см}^4$,
- мінімальний радіус інерції $i_{\text{min}} = 1,55 \text{ см}$.

3 Визначаємо гнучкість стрижня. При зазначеному виді закріплення $\mu = 1,0$. Отже, гнучкість стрижня дорівнює:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\text{min}}} = \frac{1,0 \cdot 180}{1,55} = 116.$$

4 Визначаємо критичну силу.

Якщо $\lambda_1 \geq \lambda_{\text{пред}}$ ($116 > 100,0$), то даний стрижень – це стрижень великої гнучкості, тому критична сила визначається за формулою Ейлера:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu \ell)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \times 10^5 \cdot 41,9 \times 10^{-8}}{(1,0 \cdot 1,8)^2} = 0,255 \text{ МН} = 255 \text{ кН}.$$

5 Допустиме навантаження визначається за наступною формулою:

$$[P] = \frac{P_{\text{кр}}}{[n_{\text{ст}}]} = \frac{255}{3} = 85 \text{ кН}.$$

Задача 4.3

На сталевий стояк діє стискуюча сила $P = 150 \text{ кН}$ (рис. 4.6, а). Треба перевірити на стійкість стояк трубчастого перерізу (рис. 4.6., б) із хромомолібденової сталі ($\sigma_{\text{пл}} = 540 \text{ МПа}$, $E = 2 \times 10^5 \text{ ГПа}$), якщо необхідний коефіцієнт запасу стійкості $[n_{\text{ст}}] = 3,4$.

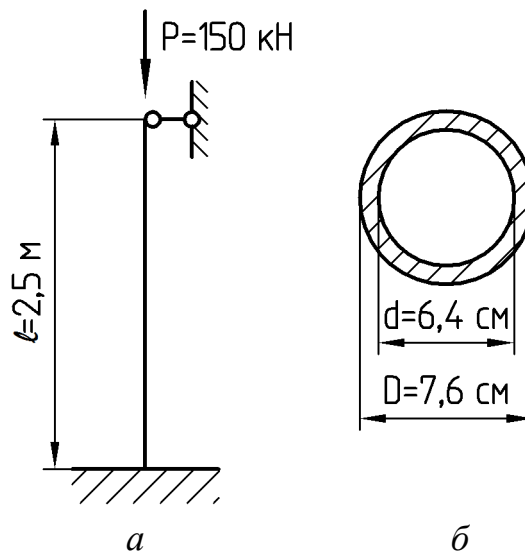


Рисунок 4.6

Розв'язання

1 Визначаємо граничну гнучкість стрижня:

$$\lambda_{\text{г}} = \pi \sqrt{\frac{A}{\sigma_{\text{пл}}}} = 3,14 \cdot \sqrt{\frac{2 \times 10^5}{540}} = 60,4.$$

2 Визначаємо геометричні характеристики перерізу:

– площа поперечного перерізу:

$$F = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = \frac{3,14 \cdot (7,6^2 - 6,4^2)}{4} = 13,2 \text{ см}^2,$$

– мінімальний момент інерції:

$$J_{\min} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = \frac{3,14 \cdot (7,6^4 - 6,4^4)}{64} = 81,4 \text{ см}^4,$$

– мінімальний радіус інерції:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{81,4}{13,2}} = 2,48 \text{ см}.$$

3 Визначаємо гнучкість стрижня. При зазначеному виді закріплення $\mu = 0,7$. Отже, гнучкість стрижня дорівнює:

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 250}{2,48} = 70,6.$$

4 Визначаємо критичну силу.

Якщо $\lambda_1 \geq \lambda_{\text{пред}}$ ($70,6 > 60,4$), то цей стовб – це стрижень великої гнучкості, тому критична сила визначається за формулою Ейлера:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu \ell)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \times 10^5 \cdot 81,4 \times 10^{-8}}{(0,7 \cdot 2,5)^2} = 0,524 \text{ МН} = 524 \text{ кН},$$

5 Визначаємо коефіцієнт запасу стійкості:

$$n_y = \frac{P_{\text{кр}}}{P} = \frac{524}{150} = 3,49 > [n_{\text{ст}}].$$

Таким чином, умова стійкості виконується.

Задача 4.4

Підібрати розміри поперечного перерізу стовба. Стовб і його переріз зображені на рисунку 4.1. Матеріал стовба – сталь Ст. 3. Нормальне допустиме напруження $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$.

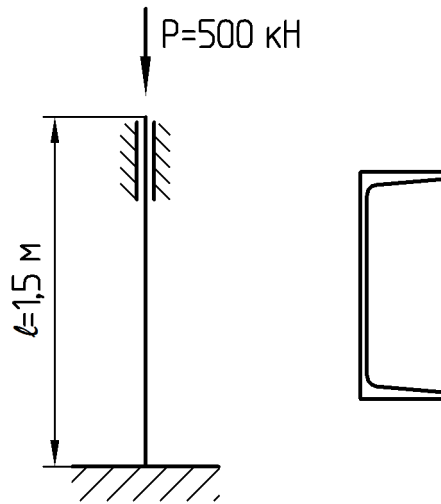


Рисунок 4.7

Розв'язання

1 Фактичне напруження повинне задовольняти наступній нерівності:

$$0,9[\sigma] < \sigma < 1,05[\sigma],$$

$$0,9 \cdot 180 < \sigma < 1,05 \cdot 180,$$

$$162 < \sigma < 189.$$

2 Приймаємо: $\varphi_1 = 0,5$.

Визначаємо площу поперечного перерізу:

$$F > \frac{P}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{500 \times 10^{-3}}{0,5 \cdot 180} \times 10^4 = 55,5 \text{ см}^2.$$

За сортаментом (додаток Б) приймаємо швелер № 40 ($F = 61,5 \text{ см}^2$, $i_{\min} = i_y = 3,23 \text{ см}$).

Визначаємо гнучкість стрижня. При зазначеному виді закріплення $\mu = 0,5$. Отже, гнучкість стрижня дорівнює:

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 150}{3,23} = 23,2.$$

За таблицею (див. додаток Д) при лінійній інтерполяції

$$\varphi_2 = 0,96 - \frac{0,96 - 0,94}{10} \cdot (23,2 - 20) = 0,954.$$

Фактичне напруження:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F} = \frac{500 \times 10^{-3}}{0,954 \cdot 61,5 \times 10^{-4}} = 85,2 \text{ МПа} \ll [\sigma] = 180 \text{ МПа}.$$

3 Приймаємо: $\varphi_1 = \frac{0,5 + 0,954}{2} = 0,727.$

Визначаємо площу поперечного перерізу:

$$F > \frac{P}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{500 \times 10^{-3}}{0,727 \cdot 180} \times 10^4 = 38,2 \text{ см}^2.$$

За сортаментом (додаток Б) приймаємо швелер № 30 ($F = 40,5 \text{ см}^2$, $i_{\min} = i_y = 2,84 \text{ см}$).

Визначаємо гнучкість стрижня:

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 150}{2,84} = 26,4.$$

За таблицею при лінійній інтерполяції:

$$\varphi_2 = 0,96 - \frac{0,96 - 0,94}{10} \cdot (26,4 - 20) = 0,947.$$

Фактичне напруження:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F} = \frac{500 \times 10^{-3}}{0,947 \cdot 40,5 \times 10^{-4}} = 130,4 \text{ МПа} \ll [\sigma] = 180 \text{ МПа}.$$

4 Приймаємо: $\varphi_1 = \frac{0,727 + 0,947}{2} = 0,837.$

Визначаємо площу поперечного перерізу:

$$F > \frac{P}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{500 \times 10^{-3}}{0,837 \cdot 180} \times 10^4 = 33,2 \text{ см}^2.$$

За сортаментом (додаток Б) приймаємо швелер № 27 ($F = 35,2 \text{ см}^2$, $i_{\min} = i_y = 2,73 \text{ см}$).

Визначаємо гнучкість стрижня:

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 150}{2,73} = 27,5.$$

За таблицею коефіцієнтів φ (додаток Д) при лінійній інтерполяції:

$$\varphi_2 = 0,96 - \frac{0,96 - 0,94}{10} \cdot (27,5 - 20) = 0,945.$$

Фактичне напруження:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F} = \frac{500 \times 10^{-3}}{0,945 \cdot 35,2 \times 10^{-4}} = 150,3 \text{ МПа} \ll [\sigma] = 180 \text{ МПа}.$$

5 Приймаємо: $\varphi_1 = \frac{0,837 + 0,945}{2} = 0,891.$

Визначаємо площу поперечного перерізу:

$$F > \frac{P}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{500 \times 10^{-3}}{0,891 \cdot 180} \times 10^4 = 31,2 \text{ см}^2.$$

За сортаментом (додаток Б) приймаємо швелер № 24а ($F = 32,9 \text{ см}^2$, $i_{\min} = i_y = 2,78 \text{ см}$).

Визначаємо гнучкість стрижня:

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 150}{2,78} = 27,0.$$

За таблицею коефіцієнтів φ (додаток Д) при лінійній інтерполяції:

$$\varphi_2 = 0,96 - \frac{0,96 - 0,94}{10} \cdot (27,0 - 20) = 0,946.$$

Фактичне напруження:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F} = \frac{500 \times 10^{-3}}{0,946 \cdot 32,9 \times 10^{-4}} = 160,7 \text{ МПа} \ll [\sigma] = 180 \text{ МПа}.$$

6 За сортаментом (додаток Б) приймаємо швелер № 24 ($F = 30,6 \text{ см}^2$, $i_{\min} = i_y = 2,60 \text{ см}$).

Визначаємо гнучкість стрижня:

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 150}{2,60} = 28,8.$$

За таблицею коефіцієнтів φ (додаток Д) при лінійній інтерполяції:

$$\varphi_2 = 0,96 - \frac{0,96 - 0,94}{10} \cdot (28,8 - 20) = 0,942.$$

Фактичне напруження:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F} = \frac{500 \times 10^{-3}}{0,942 \cdot 30,6 \times 10^{-4}} = 173,5 \text{ МПа} \approx [\sigma] = 180 \text{ МПа}.$$

Якщо фактичне напруження $\sigma = 173,5 \text{ МПа} \approx [\sigma] = 180 \text{ МПа}$, то стійкість стояка забезпечена. Остаточного приймаємо швелер № 24.

Задача 4.5

Підібрати розміри поперечного перерізу стояка. Стояк і його переріз зображені на рисунку 4.2. Матеріал стояка – сталь Ст. 3. Нормальне допустиме напруження $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$.

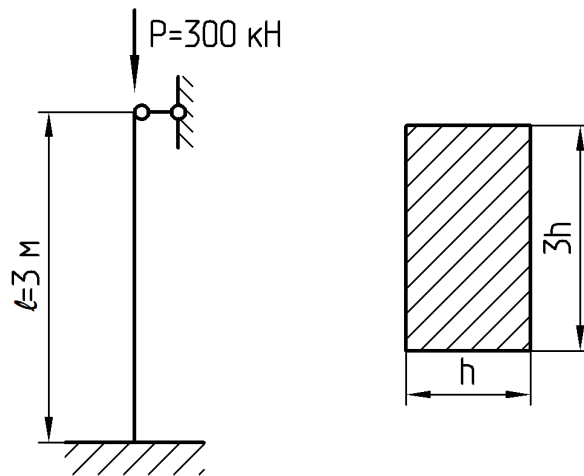


Рисунок 4.8

Розв'язання

1 Фактичне напруження повинне задовольняти наступній нерівності:

$$0,9[\sigma] < \sigma < 1,05[\sigma],$$

$$0,9 \cdot 180 < \sigma < 1,05 \cdot 180,$$

$$162 < \sigma < 189.$$

2 Визначаємо геометричні характеристики перерізу:

– площа поперечного перерізу:

$$F = h \cdot 3h = 3h^2,$$

– мінімальний момент інерції:

$$J_{\min} = \frac{3h \cdot h^3}{12} = \frac{3h^4}{12} = 0,25h^4,$$

– мінімальний радіус інерції:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{0,25h^4}{3h^2}} = 0,289h.$$

3 Приймаємо: $\varphi_1 = 0,5$.

Визначаємо площу поперечного перерізу:

$$F > \frac{P}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{300 \times 10^{-3}}{0,5 \cdot 180} \times 10^4 = 33,3 \text{ см}^2.$$

Отже,

$$h = \sqrt{\frac{F}{3}} = \sqrt{\frac{33,3}{3}} = 3,33 \text{ см}.$$

Мінімальний радіус інерції:

$$i_{\min} = 0,289h = 0,289 \cdot 3,33 = 0,96.$$

Визначаємо гнучкість стрижня. При зазначеному виді закріплення $\mu = 0,7$. Отже, гнучкість стрижня дорівнює:

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 300}{0,96} = 218.$$

Приймаємо: $\varphi_2 = 0,19$.

Фактичне напруження

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F} = \frac{300 \times 10^{-3}}{0,19 \cdot 33,3 \times 10^{-4}} = 474 \text{ МПа} \gg [\sigma] = 180 \text{ МПа}.$$

4 Приймаємо: $\varphi_1 = \frac{0,5 + 0,19}{2} = 0,345$.

Визначаємо площу поперечного перерізу:

$$F > \frac{P}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{300 \times 10^{-3}}{0,345 \cdot 180} \times 10^4 = 48,3 \text{ см}^2.$$

Отже,

$$h = \sqrt{\frac{F}{3}} = \sqrt{\frac{48,3}{3}} = 4,01 \text{ см}.$$

Мінімальний радіус інерції:

$$i_{\min} = 0,289h = 0,289 \cdot 4,01 = 1,16.$$

Визначаємо гнучкість стрижня:

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 300}{1,16} = 181,0.$$

Приймаємо:

$$\varphi_2 = 0,23 - \frac{0,23 - 0,21}{10} \cdot (181,0 - 180) = 0,228.$$

Фактичне напруження:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F} = \frac{300 \times 10^{-3}}{0,228 \cdot 48,3 \times 10^{-4}} = 272,4 \text{ МПа} \gg [\sigma] = 180 \text{ МПа}.$$

5 Приймаємо: $\varphi_1 = \frac{0,345 + 0,228}{2} = 0,287.$

Визначаємо площу поперечного перерізу:

$$F > \frac{P}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{300 \times 10^{-3}}{0,287 \cdot 180} \times 10^4 = 58,1 \text{ см}^2.$$

Отже,

$$h = \sqrt{\frac{F}{3}} = \sqrt{\frac{58,1}{3}} = 4,40 \text{ см}.$$

Мінімальний радіус інерції:

$$i_{\min} = 0,289h = 0,289 \cdot 4,40 = 1,27.$$

Визначаємо гнучкість стрижня:

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 300}{1,27} = 165,4.$$

Приймаємо:

$$\varphi_2 = 0,29 - \frac{0,29 - 0,26}{10} \cdot (165,4 - 160) = 0,274.$$

Фактичне напруження:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F} = \frac{300 \times 10^{-3}}{0,274 \cdot 58,1 \times 10^{-4}} = 188,4 \text{ МПа} \approx [\sigma] = 180 \text{ МПа}.$$

Якщо фактичне напруження $\sigma = 188,4 \text{ МПа} \approx [\sigma] = 180 \text{ МПа}$, то стійкість стояка забезпечена. Остаточню приймаємо: $h = 4,40 \text{ см}$, $3h = 13,20 \text{ см}$.

Задача 4.6

Для заданого стояка, розрахункова схема якого зображена в аксонометрії на рисунку 4.9, а, з умови стійкості підібрати та раціонально розташувати його переріз (рис. 4.9, б). Основне допустиме на стискання напруження $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, матеріал стояка – сталь Ст. 3.

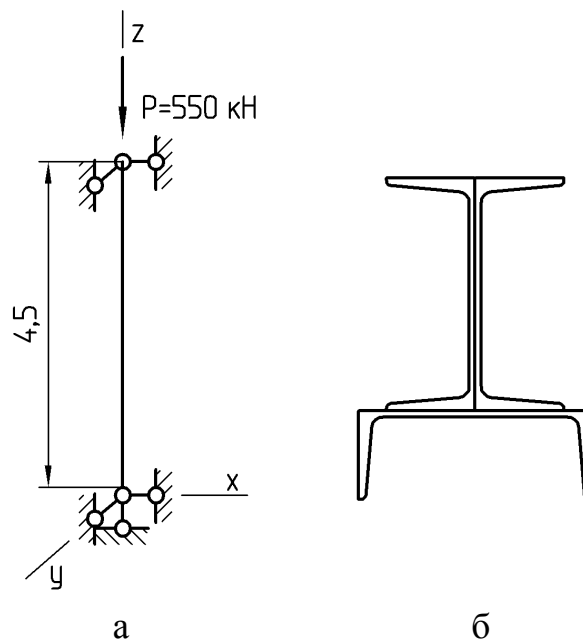


Рисунок 4.9

Розв'язання

1 Фактичне напруження повинне задовольняти наступній нерівності:

$$\begin{aligned}0,9[\sigma] < \sigma < 1,05[\sigma], \\ 0,9 \cdot 160 < \sigma < 1,05 \cdot 160, \\ 144 < \sigma < 168.\end{aligned}$$

2 Визначаємо значення коефіцієнта зведення довжини для площин ZX та ZY (рис. 4.10).

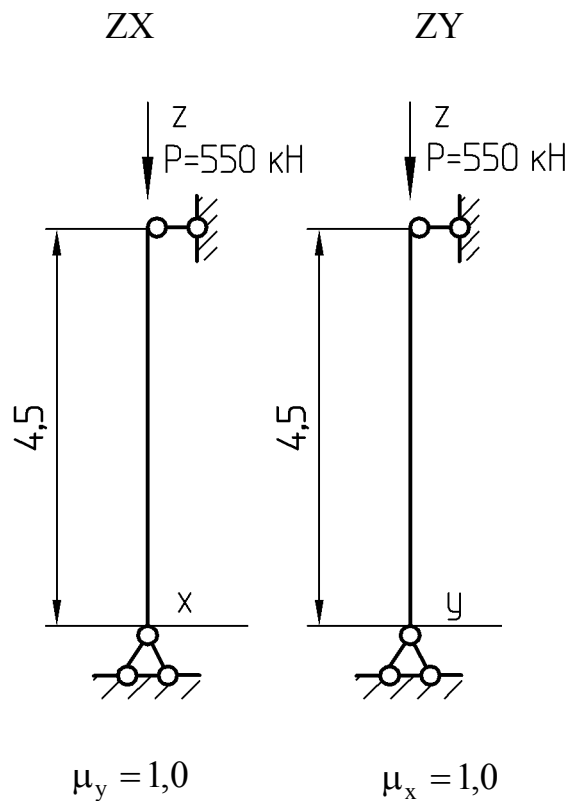


Рисунок 4.10

3 Приймаємо: $\varphi_1 = 0,5$.

Необхідна площа поперечного перерізу:

$$F \geq \frac{P}{\varphi_1[\sigma]} = \frac{550 \times 10^{-3}}{0,5 \cdot 160} \times 10^4 = 68,8 \text{ см}^2.$$

Площа одного швелера:

$$F_{\text{шв}} = \frac{F}{3} = 22,9 \text{ см}^2.$$

Приймаємо швелер № 20а. Із сортаменту (додаток Б) описуємо його геометричні характеристики:

$$H_1 = H_2 = H_3 = 20 \text{ см},$$

$$z_0 = 2,07 \text{ см},$$

$$F_1 = F_2 = F_3 = 23,4 \text{ см}^2,$$

$$J_{x_1} = 113 \text{ см}^4, \quad J_{x_2} = J_{x_3} = 1520 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_1} = 1520 \text{ см}^4, \quad J_{y_2} = J_{y_3} = 113 \text{ см}^4.$$

Визначаємо положення центра ваги всієї фігури (рис. 4.11).

Якщо фігура симетрична відносно осі Y , то центр ваги лежить на ній. Визначаємо координату центра ваги складної фігури відносно початкової системи осей за формулою

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

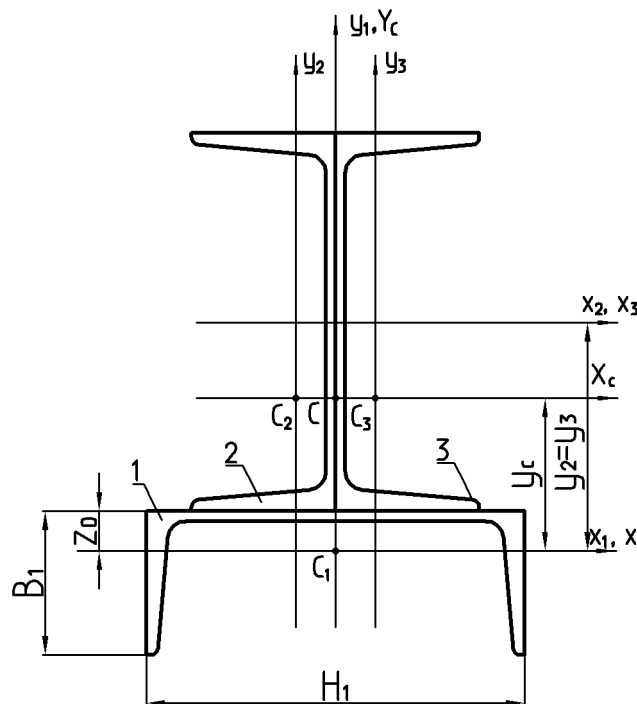


Рисунок 4.11

Знаходимо координати центра ваги i -ї фігури відносно початкової системи осей:

$$y_1 = 0 \text{ см},$$

$$y_2 = y_3 = \frac{H_1}{2} + z_0 = \frac{20}{2} + 2,07 = 12,07 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{2 \cdot 12,07 \cdot 23,4}{3 \cdot 23,4} = 8,05 \text{ см}.$$

За знайденою координатою Y_c наносимо положення центра ваги складеної фігури.

Визначаємо осьові моменти інерції всієї фігури відносно головних центральних осей фігури за формулами:

$$J_{x_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_i} + a_i^2 F_i), \quad J_{y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{y_i} + b_i^2 F_i),$$

$$a_1 = y_1 - y_c = 0 - 8,05 = -8,05 \text{ см}, \quad b_1 = 0 \text{ см},$$

$$a_2 = a_3 = y_2 - y_c = 12,07 - 8,05 = 4,02 \text{ см}, \quad b_2 = b_3 = z_0 = 2,07 \text{ см},$$

$$J_{x_c} = 113 + 8,05^2 \cdot 23,4 + 2 \cdot (1520 + 4,02^2 \cdot 23,4) = 5426 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_c} = 1520 + 2 \cdot (113 + 2,07^2 \cdot 23,4) = 1947 \text{ см}^4.$$

Знаходимо радіуси інерції для перерізу:

$$i_{x_c} = \sqrt{\frac{J_{x_c}}{F}} = \sqrt{\frac{5426}{3 \cdot 23,4}} = 8,79 \text{ см}, \quad i_{y_c} = \sqrt{\frac{J_{y_c}}{F}} = \sqrt{\frac{1947}{3 \cdot 23,4}} = 5,27 \text{ см}.$$

Знаходимо гнучкість стрижня:

$$\lambda_{x_c} = \frac{\mu_x \ell}{i_{x_c}} = \frac{1,0 \cdot 450}{8,79} = 51,2, \quad \lambda_{y_c} = \frac{\mu_y \ell}{i_{y_c}} = \frac{1,0 \cdot 450}{5,27} = 85,4.$$

Далі ведемо розрахунок за більшою гнучкістю $\lambda_{y_c} = 85,4$.

За таблицею при лінійній інтерполяції

$$\varphi_2 = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{10} \cdot (85,4 - 80) = 0,718.$$

Фактичне напруження:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F} = \frac{550 \times 10^{-3}}{0,718 \cdot 3 \cdot 23,4 \times 10^{-4}} = 109,2 \text{ МПа} \ll [\sigma].$$

$$4 \text{ Приймаємо: } \varphi_1 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \frac{0,5 + 0,718}{2} = 0,609.$$

Необхідна площа поперечного перерізу:

$$F \geq \frac{P}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{550 \times 10^{-3}}{0,609 \cdot 160} \times 10^4 = 56,4 \text{ см}^2.$$

$$\text{Площа одного швелера } F_{\text{шв}} = \frac{F}{3} = \frac{56,4}{3} = 18,8 \text{ см}^2.$$

Приймаємо швелер № 16а.

$$z_0 = 2,00 \text{ см},$$

$$F_1 = F_2 = F_3 = 19,5 \text{ см}^2,$$

$$J_{y1} = 823 \text{ см}^4, J_{y2} = J_{y3} = 78,8 \text{ см}^4.$$

Визначаємо осевий момент інерції всієї фігури відносно осі y_c :

$$b_1 = 0 \text{ см},$$

$$b_2 = b_3 = z_0 = 2,00 \text{ см},$$

$$J_{y_c} = 823 + 2 \cdot (78,8 + 2,00^2 \cdot 19,5) = 1137 \text{ см}^4.$$

Знаходимо мінімальний радіус інерції i_{y_c} :

$$i_{y_c} = \sqrt{\frac{J_{y_c}}{F}} = \sqrt{\frac{1137}{3 \cdot 19,5}} = 4,41 \text{ см}.$$

Знаходимо гнучкість стрижня:

$$\lambda_{y_c} = \frac{\mu_y l}{i_{y_c}} = \frac{1,0 \cdot 450}{4,41} = 102,1.$$

За таблицею коефіцієнтів φ (додаток Д) при лінійній інтерполяції

$$\varphi_2 = 0,60 - \frac{0,60 - 0,52}{10} \cdot (102,1 - 100) = 0,583.$$

Фактичне напруження

$$\sigma = \frac{P}{\phi F} = \frac{550 \times 10^{-3}}{0,583 \cdot 3 \cdot 19,5 \times 10^{-4}} = 161,2 \text{ МПа} \approx [\sigma].$$

Якщо фактичне напруження $\sigma = 161,2 \text{ МПа} \approx [\sigma] = 180 \text{ МПа}$, то стійкість стояка забезпечена. Остаточного приймаємо швелер № 16а.

Задача 4.7

Для заданого стояка, розрахункова схема якого подана в аксонометрії на рисунку 4.12, а, з умови стійкості підібрати та раціонально розташувати його переріз (рис. 4.12, б). Основне допустиме на стискання напруження $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, матеріал стояка – сталь Ст. 3.

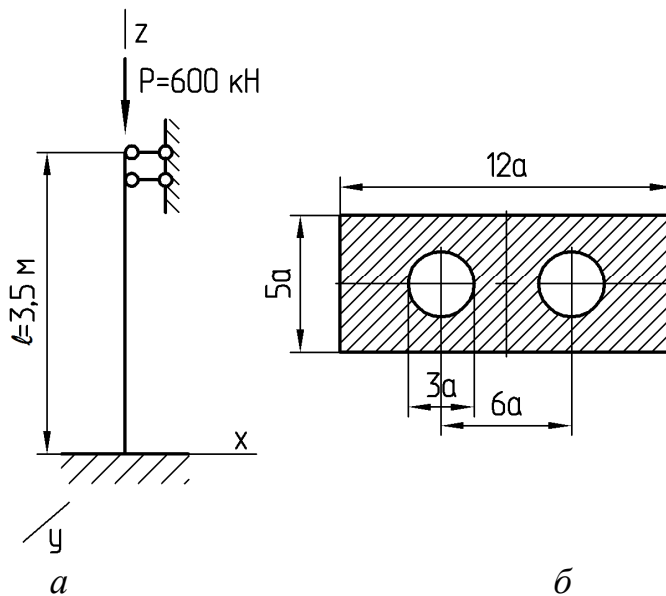


Рисунок 4.12

Розв'язання

1 Фактичне напруження повинне задовольняти наступній нерівності:

$$\begin{aligned} 0,9[\sigma] < \sigma < 1,05[\sigma], \\ 0,9 \cdot 160 < \sigma < 1,05 \cdot 160, \\ 144 < \sigma < 168. \end{aligned}$$

2 Визначаємо значення коефіцієнта зведення довжини для площин ZX та ZY (рис. 4.13).

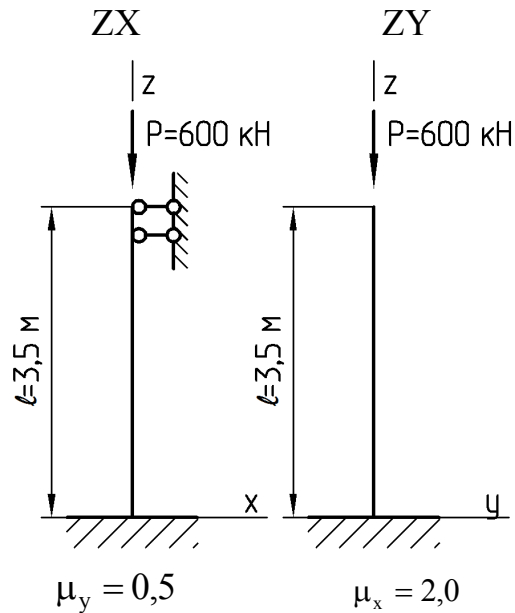


Рисунок 4.13

3 Визначаємо геометричні характеристики перерізу (рис. 4.14).

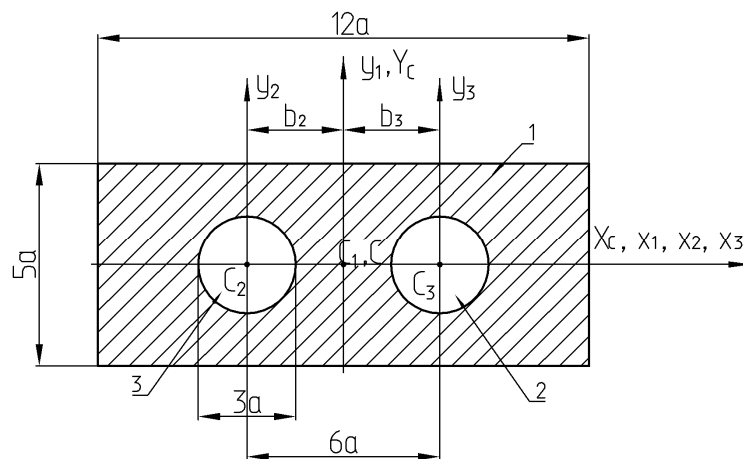


Рисунок 4.14

Площа поперечного перерізу дорівнює:

$$F = 12a \cdot 5a - 2 \frac{\pi(3a)^2}{4} = 60a^2 - \frac{18\pi a^2}{4} = \frac{240a^2 - 18\pi a^2}{4} = 45,87a^2.$$

Визначаємо положення центра ваги всієї фігури. Якщо фігура симетрична відносно осей X , Y , то центр ваги всього перерізу C лежить на перетині цих осей, а осі симетрії є осями X_c та Y_c .

Визначаємо осові моменти інерції прямокутника:

$$J_{x1} = \frac{12a(5a)^3}{12} = 125a^4, \quad J_{y1} = \frac{5a(12a)^3}{12} = 720a^4.$$

Визначаємо осьові моменти інерції круга:

$$J_{x2} = J_{y2} = \frac{\pi(3a)^4}{64} = \frac{254,34a^4}{64} = 3,97a^4.$$

Визначаємо осьові моменти інерції всієї фігури відносно головних центральних осей фігури за формулами:

$$J_{xc} = \sum_{i=1}^n (J_{xi} + a_i^2 F_i), \quad J_{yc} = \sum_{i=1}^n (J_{yi} + b_i^2 F_i),$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0 \text{ см}, \quad b_1 = 0, b_2 = b_3 = 3a.$$

$$J_{xc} = 125a^4 - 2 \cdot 3,97a^4 = 117,06a^4,$$

$$J_{yc} = 720a^4 - 2 \cdot \left(3,97a^4 + 9a^2 \cdot \frac{3,14 \cdot 9a^2}{4} \right) = 584,89a^4.$$

Знаходимо радіуси інерції для перерізу:

$$i_{xc} = \sqrt{\frac{J_{xc}}{F}} = \sqrt{\frac{117,06a^4}{45,87a^2}} = 1,60a, \quad i_{yc} = \sqrt{\frac{J_{yc}}{F}} = \sqrt{\frac{584,89a^4}{45,87a^2}} = 3,57a.$$

4 Приймаємо: $\varphi_1 = 0,5$.

Необхідна площа поперечного перерізу:

$$F \geq \frac{P}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{600 \times 10^{-3}}{0,5 \cdot 160} \times 10^4 = 75 \text{ см}^2.$$

Якщо $F = 45,87a^2$, то

$$a = \sqrt{\frac{F}{45,87}} = \sqrt{\frac{75}{45,87}} = 1,28 \text{ см}.$$

Знаходимо радіуси інерції для перерізу:

$$i_{xc} = 1,60a = 1,60 \cdot 1,28 = 2,05 \text{ см}, \quad i_{yc} = 3,57a = 3,57 \cdot 1,28 = 4,57 \text{ см}.$$

Знаходимо гнучкість стрижня:

$$\lambda_{xc} = \frac{\mu_x l}{i_{xc}} = \frac{2 \cdot 350}{2,05} = 341,5, \quad \lambda_{yc} = \frac{\mu_y l}{i_{yc}} = \frac{0,5 \cdot 350}{4,57} = 38,3.$$

З метою раціонального розташування перерізу необхідно, щоб більшому коефіцієнтові μ відповідав більший радіус інерції, тобто переріз

необхідно повернути на 90^0 , тоді радіуси інерції поміняються місцями, тобто: $i_{xc} = 4,57$ см, $i_{yc} = 2,05$ см.

Тоді

$$\lambda_{xc} = \frac{\mu_x l}{i_{xc}} = \frac{2 \cdot 350}{4,57} = 153,2, \quad \lambda_{yc} = \frac{\mu_y l}{i_{yc}} = \frac{0,5 \cdot 350}{2,05} = 85,4.$$

Далі ведемо розрахунок за більшою гнучкістю $\lambda_{xc} = 153,2$.

За таблицею при лінійній інтерполяції:

$$\varphi_2 = 0,32 - \frac{0,32 - 0,29}{10} \cdot (153,2 - 150) = 0,310.$$

Фактичне напруження:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F} = \frac{600 \times 10^{-3}}{0,310 \cdot 75 \times 10^{-4}} = 258,1 \text{ МПа} \gg [\sigma].$$

$$5 \text{ Приймаємо: } \varphi_1 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \frac{0,5 + 0,310}{2} = 0,405.$$

Необхідна площа поперечного перерізу:

$$F \geq \frac{P}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{600 \times 10^{-3}}{0,405 \cdot 160} \times 10^4 = 92,6 \text{ см}^2.$$

Якщо $F = 45,87a^2$, то

$$a = \sqrt{\frac{F}{45,87}} = \sqrt{\frac{92,6}{45,87}} = 1,42 \text{ см}.$$

Знаходимо радіуси інерції для перерізу:

$$i_{xc} = 1,60a = 1,60 \cdot 1,42 = 2,27 \text{ см}, \quad i_{yc} = 3,57a = 3,57 \cdot 1,42 = 5,07 \text{ см}.$$

З метою раціонального розташування перерізу повертаємо переріз на 90^0 , тобто: $i_{xc} = 5,07$ см, $i_{yc} = 2,27$ см.

Тоді

$$\lambda_{xc} = \frac{\mu_x l}{i_{xc}} = \frac{2 \cdot 350}{5,07} = 138,0, \quad \lambda_{yc} = \frac{\mu_y l}{i_{yc}} = \frac{0,5 \cdot 350}{2,27} = 77,1.$$

Далі ведемо розрахунок за більшою гнучкістю $\lambda_{xc} = 138,0$.

За таблицею при лінійній інтерполяції:

$$\varphi_2 = 0,40 - \frac{0,40 - 0,36}{10} \cdot (138,0 - 130) = 0,368.$$

Фактичне напруження:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F} = \frac{600 \times 10^{-3}}{0,368 \cdot 92,6 \times 10^{-4}} = 176,0 \text{ МПа} \gg [\sigma].$$

6 Приймаємо: $\varphi_1 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \frac{0,405 + 0,368}{2} = 0,387$.

Необхідна площа поперечного перерізу:

$$F \geq \frac{P}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{600 \times 10^{-3}}{0,387 \cdot 160} \times 10^4 = 97,0 \text{ см}^2.$$

Якщо $F = 45,87a^2$, то

$$a = \sqrt{\frac{F}{45,87}} = \sqrt{\frac{97,0}{45,87}} = 1,45 \text{ см}.$$

Знаходимо радіуси інерції для перерізу:

$$i_{xc} = 1,60a = 1,60 \cdot 1,45 = 2,33 \text{ см}, \quad i_{yc} = 3,57a = 3,57 \cdot 1,45 = 5,19 \text{ см}.$$

З метою раціонального розташування перерізу повертаємо переріз на 90° , тобто: $i_{xc} = 5,19 \text{ см}$, $i_{yc} = 2,33 \text{ см}$.

Тоді

$$\lambda_{xc} = \frac{\mu_x l}{i_{xc}} = \frac{2 \cdot 350}{5,19} = 134,9, \quad \lambda_{yc} = \frac{\mu_y l}{i_{yc}} = \frac{0,5 \cdot 350}{2,33} = 75,1.$$

Далі ведемо розрахунок за більшою гнучкістю $\lambda_{xc} = 134,9$.

За таблицею при лінійній інтерполяції:

$$\varphi_2 = 0,40 - \frac{0,40 - 0,36}{10} \cdot (134,9 - 130) = 0,384.$$

Фактичне напруження:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi \cdot F} = \frac{600 \times 10^{-3}}{0,384 \cdot 97,0 \times 10^{-4}} = 160,9 \text{ МПа} \approx [\sigma].$$

Якщо фактичне напруження $\sigma = 160,9 \text{ МПа} \approx [\sigma] = 180 \text{ МПа}$, то стійкість стояка забезпечена. Остаточню приймаємо: $a = 1,45 \text{ см}$.

5 ДЕФОРМУВАННЯ СТРИЖНІВ ПРИ ДИНАМІЧНОМУ РЕЖИМІ НАВАНТАЖЕННЯ

5.1 Змушені коливання системи з одним степенем вільності

Динамічним називається таке навантаження, яке супроводжується силами інерції розглянутої системи.

Найбільше нормальне напруження при коливальному динамічному режимі навантаження дорівнює:

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст}, \quad (5.1)$$

де k_d – динамічний коефіцієнт;

$\sigma_{ст}$ – нормальне напруження при статичному навантаженні.

Динамічний коефіцієнт при коливальному русі системи в найпростіших випадках визначається за формулою

$$k_d = 1 + \frac{P_0}{G} \beta, \quad (5.2)$$

де P_0 – максимальне значення збуджуючи сили, прикладеної статично;

G – вага тіла;

β – коефіцієнт наростання коливань.

Коефіцієнт наростання коливань без затухання визначається:

$$\beta = \frac{1}{\left| 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right|}, \quad (5.3)$$

де Ω – частота змушених коливань;

ω – кругова частота власних коливань.

Кругова частота власних коливань визначається:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}m}}, \quad (5.4)$$

де g – прискорення сили ваги;

$\delta_{ст}$ – статична деформація розтягання пружної системи під дією маси Q ;

c – жорсткість пружної системи;

δ_{11} – переміщення маси під дією статично прикладеної одиничної сили в напрямку коливань;

m – маса тіла.

Переміщення δ_{11} може бути визначене за допомогою інтеграла Мору:

– для балок і рам:

$$\delta_{11} = \int_{\ell} \frac{M_{xP} M_{x1} dz}{EJ_x}, \quad (5.5)$$

– для ферм:

$$\delta_{11} = \int_{\ell} \frac{N_P N_1 dz}{EF}. \quad (5.6)$$

Період коливань визначається за формулою

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{g}{\delta_{CT}}} = 2\pi \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (5.7)$$

Задача 5.1

На швелерній балці (рис. 5.1) установлений двигун масою 3 т, який робить 400 об/хв. Відцентрова сила інерції, яка виникає внаслідок невірноваженості обертових частин двигуна, дорівнює $T = 0,3mg$. Власною вагою балок і силою опору середовища нехтуємо. Визначити нормальне напруження, яке виникає в небезпечному перерізі балки.

Розв'язання

1 Визначаємо переміщення маси під дією статично прикладеної одиничної сили в напрямку коливань.

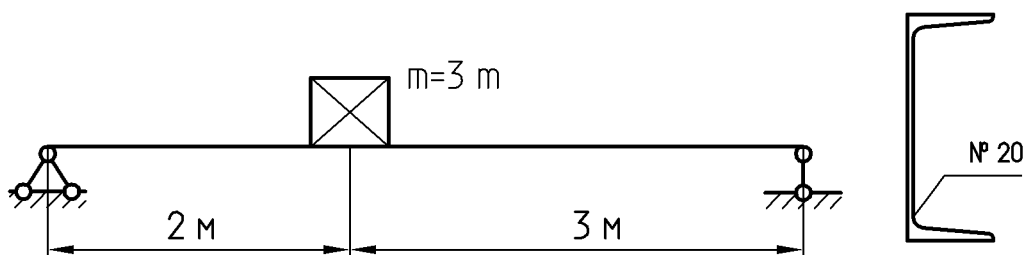


Рисунок 5.1

Для цього в точці установки двигуна (рис. 5.2, а) прикладаємо одиничну силу, тобто $P=1$ (рис. 5.2, б), і визначаємо опорні реакції від дії одиничної сили, дорівнюючи нулю суми моментів усіх зовнішніх сил відносно точок А та В (див. рис. 5.2, б):

$$\sum M_A = 0,$$

$$-P \cdot 2 + R_B \cdot 5 = 0,$$

$$R_B = \frac{P \cdot 2}{5} = \frac{1 \cdot 2}{5} = 0,4.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$P \cdot 3 - R_A \cdot 5 = 0,$$

$$R_A = \frac{P \cdot 3}{5} = \frac{1 \cdot 3}{5} = 0,6.$$

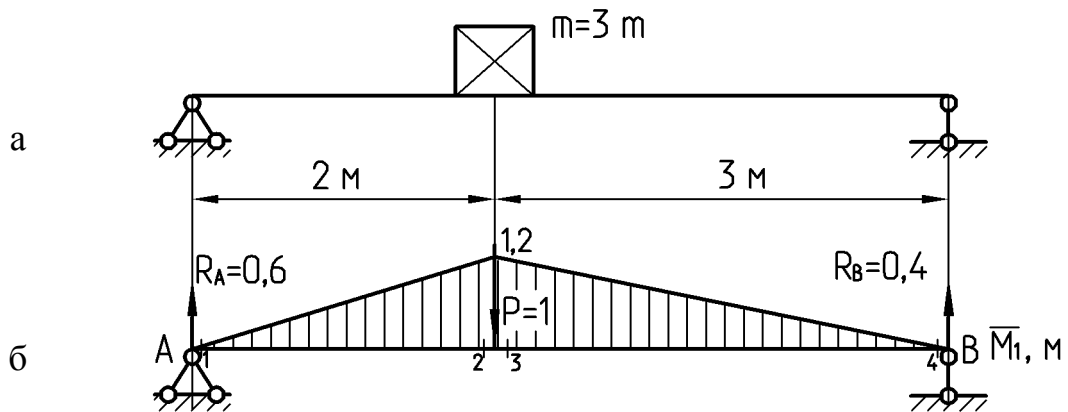


Рисунок 5.2

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$-P + R_A + R_B = 0,$$

$$-1 + 0,6 + 0,4 = 0,$$

$$-1 + 1 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах від дії одиничної сили (див. рис. 5.2, б):

$$M_1 = M_4 = 0 \text{ м},$$

$$M_2 = M_3 = R_A \cdot 2 = 0,6 \cdot 2 = 1,2 \text{ м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничної сили за характерними перерізами (див. рис. 5.2, б).

З використанням формули крайніх ординат визначаємо переміщення δ_{11} :

$$\delta_{11} = \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 1,2 \cdot 1,2) + \frac{3}{6EJ_x}(2 \cdot 1,2 \cdot 1,2) = \frac{2,4}{EJ_x}.$$

Якщо переріз балки – швелер № 20, то момент інерції $J_x = 1520 \text{ см}^4$, а момент опору $W_x = 152 \text{ см}^3$.

Тоді переміщення δ_{11} дорівнює:

$$\delta_{11} = \frac{2,4 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \times 10^6 \cdot 1520 \times 10^{-8}} = 7,9 \times 10^{-6} \text{ м/Н}.$$

2 Визначаємо кругову частоту власних коливань:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} m}} = \sqrt{\frac{1}{7,9 \times 10^{-6} \cdot 3 \times 10^3}} = 20,5 \text{ с}^{-1}.$$

3 Визначаємо кругову частоту змушених коливань:

$$\Omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 400}{30} = 41,9 \text{ с}^{-1}.$$

4 Визначаємо коефіцієнт наростання коливань:

$$\beta = \frac{1}{\left|1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right|} = \frac{1}{\left|1 - \frac{41,9^2}{20,5^2}\right|} = 0,32.$$

5 Визначаємо найбільше нормальне напруження при коливальному русі системи:

$$\sigma_d = \frac{M_G + M_T \beta}{W_x} = \frac{\overline{M}_{1 \max} (G + T \beta)}{W_x},$$

де M_G – згинальний момент від дії ваги двигуна;

M_T – згинальний момент від дії відцентрової сили інерції.

При зазначеному виді навантаження $G = 30 \text{ кН}$, $T = 9 \text{ кН}$.

Отже,

$$\sigma_d = \frac{1,2 \cdot (30 + 9 \cdot 0,32) \times 10^{-3}}{152 \times 10^{-6}} = 259,6 \text{ МПа}.$$

Задача 5.2

На рамі (рис. 5.3) установлений двигун масою 3 т, який робить 700 об/хв. Відцентрова сила інерції, яка виникає внаслідок невірноваженості обертових частин двигуна, $T = 0,3mg$. Власною вагою балок і силою опору середовища нехтуємо. Визначити нормальне напруження, яке виникає в небезпечному перерізі балки.

Розв'язання

1 Визначаємо переміщення маси під дією статично прикладеної одиничної сили в напрямку коливань.

Для цього в точці установки двигуна (рис. 5.4) прикладаємо одиничну силу, тобто $P = 1$.

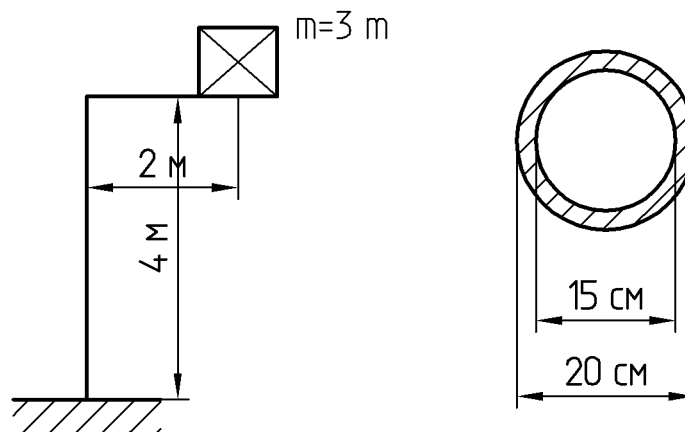


Рисунок 5.3

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах від дії одиничної сили (див. рис. 5.4):

$$M_1 = 0 \text{ м},$$

$$M_2 = M_3 = M_4 = P \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничної сили за характерними перерізами (див. рис. 5.4).

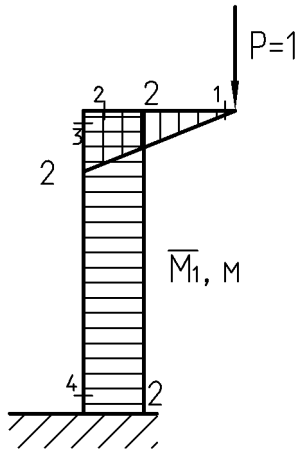


Рисунок 5.4

З використанням формули крайніх ординат визначаємо переміщення δ_{11} :

$$\delta_{11} = \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 2 \cdot 2) + \frac{4}{6EJ_x}(6 \cdot 2 \cdot 2) = \frac{18,7}{EJ_x}.$$

Визначаємо момент інерції перерізу та момент опору:

$$c = \frac{d}{D} = \frac{15}{20} = 0,75,$$

$$J_x = \frac{\pi D^4}{64}(1 - c^4) = \frac{3,14 \cdot 20^4}{64}(1 - 0,75^4) = 5366 \text{ см}^4,$$

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32}(1 - c^4) = \frac{3,14 \cdot 20^3}{32}(1 - 0,75^4) = 537 \text{ см}^3.$$

Тоді переміщення δ_{11} дорівнює:

$$\delta_{11} = \frac{18,7 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \times 10^6 \cdot 5366 \times 10^{-8}} = 1,74 \times 10^{-6} \text{ м/Н}.$$

2 Визначаємо кругову частоту власних коливань:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} m}} = \sqrt{\frac{1}{1,74 \times 10^{-6} \cdot 3 \times 10^3}} = 13,8 \text{ с}^{-1}.$$

3 Визначаємо кругову частоту змущених коливань:

$$\Omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 700}{30} = 73,3 \text{ с}^{-1}.$$

4 Визначаємо коефіцієнт наростання коливань:

$$\beta = \frac{1}{\left|1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right|} = \frac{1}{\left|1 - \frac{73,3^2}{13,8^2}\right|} = 0,04 .$$

5 Визначаємо найбільше нормальне напруження при коливальному русі системи.

При зазначеному виді навантаження $G = 30 \text{ кН}$, $T = 9 \text{ кН}$.

Отже,

$$\sigma_d = \frac{2 \cdot (30 + 9 \cdot 0,04) \times 10^{-3}}{537 \times 10^{-6}} = 113,1 \text{ МПа}$$

Задача 5.3

На рамі (рис. 5.5) установлений двигун масою 5 т , який робить 600 об/хв . Відцентрова сила інерції, яка виникає внаслідок неврівноваженості обертових частин двигуна, $T = 0,3mg$. Власною вагою балок і силою опору середовища нехтуємо. Визначити нормальне напруження, яке виникає в небезпечному перерізі балки. Обчислити кількість обертів двигуна, при якому настає резонанс.

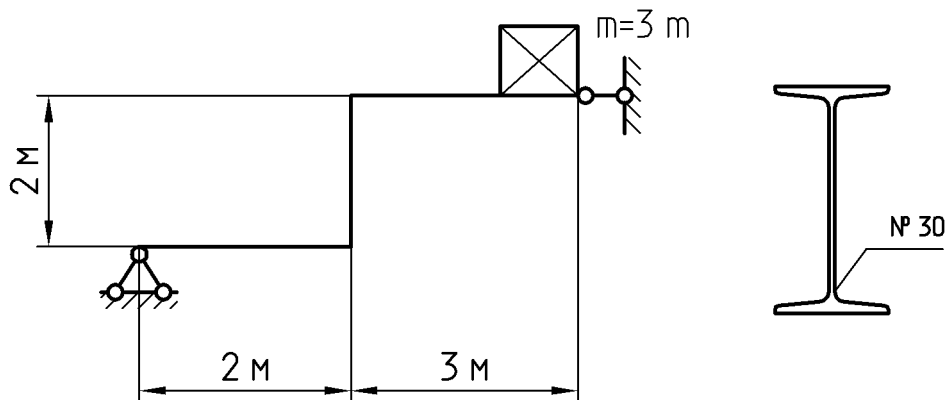


Рисунок 5.5

Розв'язання

1 Визначаємо переміщення маси під дією статично прикладеної одиничної сили в напрямку коливань.

Для цього в точці установки двигуна (рис. 5.6) прикладаємо одиничну силу, тобто $P = 1$, і визначаємо опорні реакції від дії одиничної сили:

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, \\ -P \cdot 5 + H_B \cdot 2 &= 0, \\ H_B &= \frac{P \cdot 5}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2} = 2,5.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum P_y &= 0, \\ R_A - P &= 0, \\ R_A &= P = 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum P_z &= 0, \\ H_A - H_B &= 0, \\ H_A &= H_B = 2,5.\end{aligned}$$

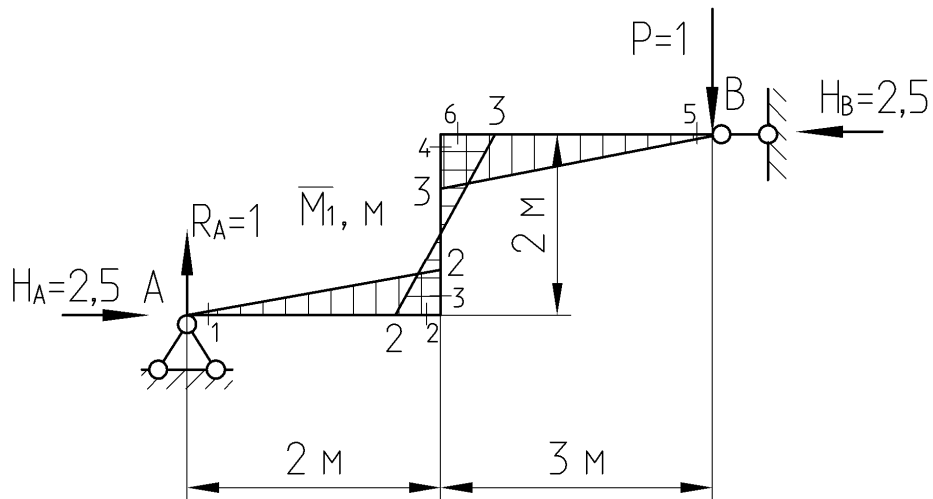


Рисунок 5.6

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах від дії одиничної сили (див. рис. 5.6):

$$\begin{aligned}M_1 &= M_5 = 0 \text{ м}, \\ M_2 &= M_3 = R_A \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ м}, \\ M_4 &= M_6 = -P \cdot 3 = -1 \cdot 3 = -3 \text{ м}.\end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничної сили за характерними перерізами (див. рис. 5.6).

З використанням формули крайніх ординат визначаємо переміщення δ_{11} :

$$\delta_{11} = \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 2 \cdot 2) + \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2) + \frac{3}{6EJ_x}(2 \cdot 3 \cdot 3) = \frac{16,3}{EJ_x}.$$

Якщо переріз балки – двотавр № 30, то момент інерції $J_x = 7080 \text{ см}^4$, а момент опору $W_x = 472 \text{ см}^3$.

Тоді переміщення δ_{11} дорівнює:

$$\delta_{11} = \frac{16,3}{2 \times 10^5 \times 10^6 \cdot 7080 \times 10^{-8}} = 1,15 \times 10^{-6} \text{ м/Н}.$$

2 Визначаємо кругову частоту власних коливань:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}m}} = \sqrt{\frac{1}{1,15 \times 10^{-6} \cdot 5 \times 10^3}} = 13,2 \text{ с}^{-1}.$$

3 Визначаємо кругову частоту змушених коливань:

$$\Omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 600}{30} = 62,8 \text{ с}^{-1}.$$

4 Визначаємо коефіцієнт наростання коливань:

$$\beta = \frac{1}{\left| 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right|} = \frac{1}{\left| 1 - \frac{62,8^2}{13,2^2} \right|} = 0,046.$$

5 Визначаємо найбільше нормальне напруження при коливальному русі системи:

$$\sigma_d = \frac{M_G + M_T \beta}{W_x} = \frac{\overline{M}_{1\max}(G + T\beta)}{W_x},$$

де M_G – згинальний момент від дії ваги двигуна;

M_T – згинальний момент від дії відцентрової сили інерції.

При зазначеному виді навантаження $G = 50 \text{ кН}$, $T = 15 \text{ кН}$.

Отже,

$$\sigma_d = \frac{3 \cdot (50 + 15 \cdot 0,046) \times 10^{-3}}{472 \times 10^{-6}} = 322 \text{ МПа}.$$

Визначаємо резонансну частоту. Резонанс настає при збігу власної частоти коливань і частоти змушених коливань, тобто при

$$\omega = \Omega_p = \frac{\pi n_p}{30}.$$

Отже, резонансна частота може бути визначена:

$$n_p = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 13,2}{3,14} = 126 \text{ об/хв}.$$

Задача 5.4

На фермі (рис. 5.7) установлений двигун масою 4 т, який робить 500 об/хв. Відцентрова сила інерції, яка виникає внаслідок невірноваженості обертових частин двигуна, $T = 0,3mg$. Власною вагою балок і силою опору середовища нехтуємо. Визначити найбільше нормальне напруження. Обчислити кількість обертів двигуна, при якому настає резонанс.

Розв'язання

1 Визначаємо довжину кожного стрижня (рис. 5.8):

$$\ell_1 = \ell_9 = 3,0 \text{ м},$$

$$\ell_2 = \ell_8 = \sqrt{2^2 + 1,5^2} = 2,5 \text{ м},$$

$$\ell_3 = \ell_7 = \sqrt{1^2 + 1,5^2} = 1,8 \text{ м},$$

$$\ell_4 = \ell_6 = 1,0 \text{ м},$$

$$\ell_5 = 1,5 \text{ м}.$$

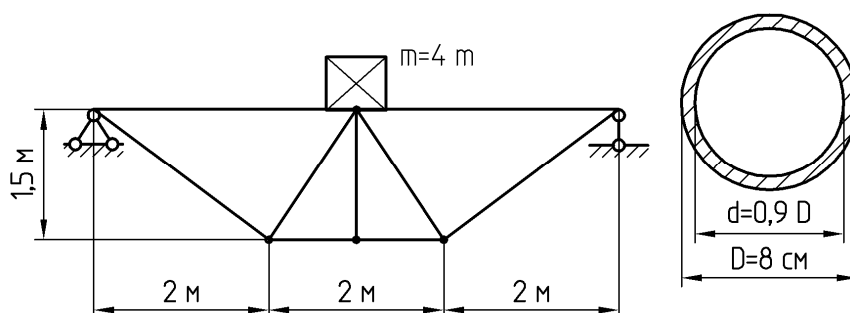


Рисунок 5.7

2 Визначаємо синуси та косинуси кутів нахилу стрижнів:

$$\sin \alpha = \frac{1,5}{2,5} = 0,6,$$

$$\cos \alpha = \frac{2,0}{2,5} = 0,8,$$

$$\sin \beta = \frac{1,5}{1,8} = 0,833,$$

$$\cos \beta = \frac{1,0}{1,8} = 0,555.$$

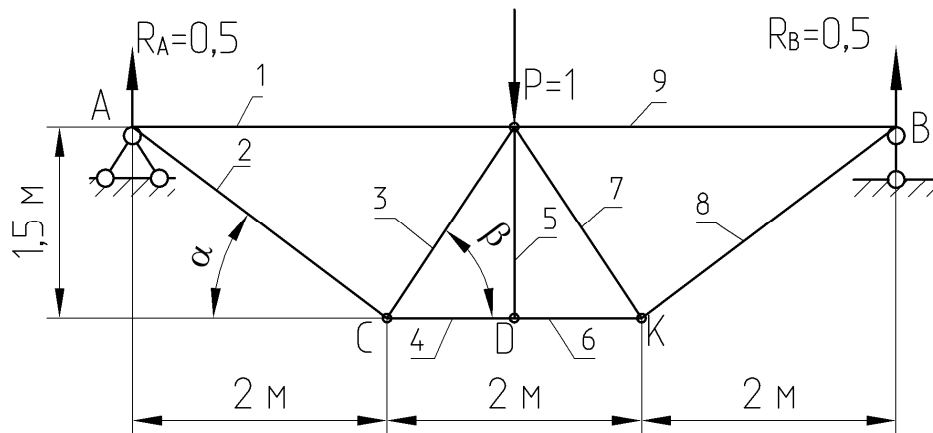


Рисунок 5.8

3 Визначаємо переміщення маси під дією статично прикладеної одиничної сили в напрямку коливаль.

Для цього в точці встановлення двигуна (див. рис. 5.8) прикладаємо одиничну силу, тобто $P=1$, і визначаємо опорні реакції від дії одиничної сили. Якщо ферма є симетричною, то

$$R_A = R_B = 0,5.$$

Переміщення δ_{11} визначаємо за допомогою інтеграла Мору:

$$\delta_{11} = \int_{\ell} \frac{N_P N_1 dz}{EF} = \int_{\ell} \frac{\overline{N_1^2} dz}{EF} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 \ell_i}{EF_i}.$$

Обчислюємо значення поздовжніх сил у кожному стрижні від дії одиничної сили, розглядаючи кожен вузол окремо (рис. 5.9).

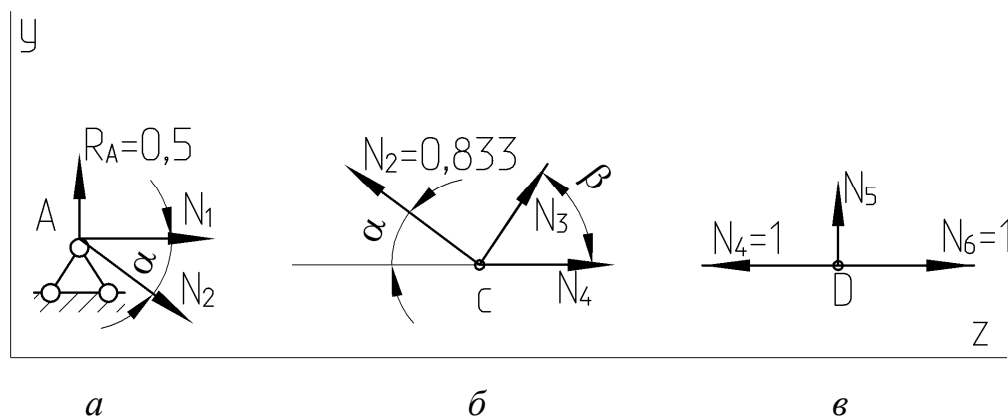


Рисунок 5.9

Розглянемо вузол А (рис. 5.9, а):

$$\sum P_y = 0,$$

$$R_A - N_2 \sin \alpha = 0,$$

$$N_2 = \frac{R_A}{\sin \alpha} = \frac{0,5}{0,6} = 0,833.$$

$$\sum P_z = 0,$$

$$N_1 + N_2 \cos \alpha = 0,$$

$$N_1 = -N_2 \cos \alpha = -0,833 \cdot 0,8 = -0,666.$$

Розглянемо вузол С (рис. 5.9, б):

$$\sum P_y = 0,$$

$$N_2 \sin \alpha + N_3 \sin \beta = 0,$$

$$N_3 = -\frac{N_2 \sin \alpha}{\sin \beta} = -\frac{0,833 \cdot 0,6}{0,833} = -0,6.$$

$$\sum P_z = 0,$$

$$-N_2 \cos \alpha + N_3 \cos \beta + N_4 = 0,$$

$$N_4 = N_2 \cos \alpha - N_3 \cos \beta = 0,833 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,555 = 1,0.$$

Розглянемо вузол D (рис. 5.9, в):

$$\sum P_y = 0,$$

$$N_5 = 0.$$

Якщо ферма симетрична, то:

$$N_9 = N_1 = -0,666,$$

$$N_8 = N_2 = 0,833,$$

$$N_7 = N_3 = -0,6,$$

$$N_6 = N_4 = 1,0.$$

Отримані дані занесемо до таблиці 5.1 та обчислимо значення $\sum \overline{N_i^2 \ell_i}$.

Таблиця 5.1

Номер стрижня	ℓ_i	$\overline{N_i}$	$\overline{N_i^2}$	$\overline{N_i^2 \ell_i}$
1	3,0	-0,666	0,444	1,332
2	2,5	0,833	0,694	1,735
3	1,8	-0,6	0,36	0,648
4	1,0	1,0	1,0	1,0
5	1,5	0	0	0
6	1,0	1,0	1,0	1,0
7	1,8	-0,6	0,36	0,648
8	2,5	0,833	0,694	1,735
9	3,0	-0,666	0,444	1,332
				$\sum \overline{N_i^2 \ell_i} = 9,43$

Визначаємо площу поперечного перерізу кільця із зовнішнім $D = 8$ см і внутрішнім $d = 0,9D = 0,9 \cdot 8 = 7,2$ см діаметрами:

$$F = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{3,14}{4}(8^2 - 7,2^2) = 9,55 \text{ см}^4.$$

Тоді переміщення δ_{11} дорівнює:

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 \ell_i}{EF_i} = \frac{9,43}{2 \times 10^5 \times 10^6 \cdot 9,55 \times 10^{-4}} = 5 \times 10^{-8} \text{ м/Н}.$$

4 Визначаємо кругову частоту власних коливань:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} m}} = \sqrt{\frac{1}{5 \times 10^{-8} \cdot 4 \times 10^3}} = 70,0 \text{ с}^{-1}.$$

5 Визначаємо кругову частоту змушених коливань:

$$\Omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 500}{30} = 52,5 \text{ с}^{-1}.$$

6 Визначаємо коефіцієнт наростання коливань:

$$\beta = \frac{1}{\left| 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right|} = \frac{1}{\left| 1 - \frac{52,5^2}{70,0^2} \right|} = 2,27.$$

7 Визначаємо найбільше нормальне напруження при коливальному русі системи:

$$\sigma_d = \frac{N_G + N_T \beta}{F} = \frac{\bar{N}_{l \max} (G + T \beta)}{F},$$

де N_G – поздовжня сила від дії ваги двигуна;

N_T – поздовжня сила від дії відцентрової сили інерції.

При зазначеному виді навантаження $G = 40$ кН, $T = 12$ кН.

Отже,

$$\sigma_d = \frac{1,0 \cdot (40 + 12 \cdot 2,27) \times 10^{-3}}{9,55 \times 10^{-4}} = 70,5 \text{ МПа}.$$

8 Визначаємо резонансну частоту. Резонанс настає при збігу власної частоти коливань і частоти змушених коливань, тобто при

$$\omega = \Omega_p = \frac{\pi n_p}{30}.$$

Отже, резонансна частота може бути визначена:

$$n_p = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 70,0}{3,14} = 670 \text{ об/хв}.$$

Задача 5.5

На фермі (рис. 5.10) установлений двигун масою 5 т, що робить 200 об/хв. Відцентрова сила інерції, яка виникає внаслідок невідножності обертових частин двигуна, $T = 0,3mg$. Власною вагою балок і силою опору середовища нехтуємо. Визначити найбільше нормальне напруження. Обчислити кількість обертів двигуна, при якому настає резонанс.

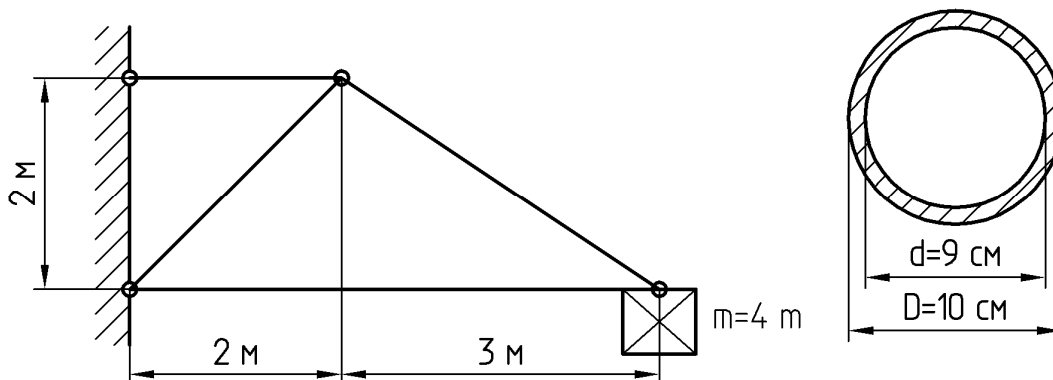


Рисунок 5.10

Розв'язання

1 Визначаємо довжину кожного стрижня (рис. 5.11):

$$\ell_1 = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3,61 \text{ м},$$

$$\ell_2 = 5 \text{ м},$$

$$\ell_3 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2,83 \text{ м},$$

$$\ell_4 = 2 \text{ м}.$$

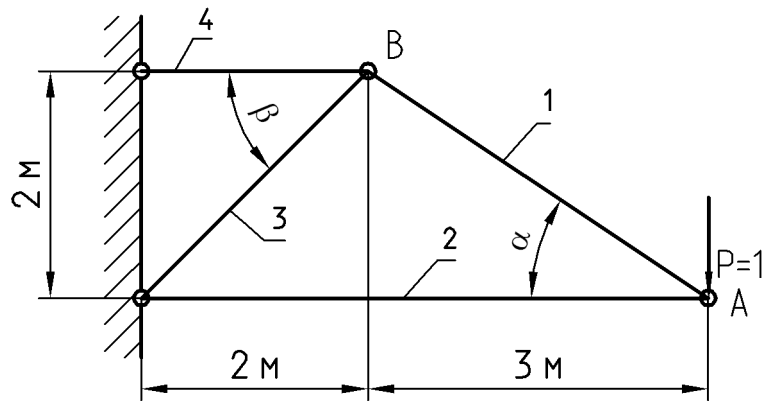


Рисунок 5.11

2 Визначаємо синуси та косинуси кутів нахилу стрижнів:

$$\sin \alpha = \frac{2}{3,61} = 0,555,$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{3,61} = 0,832,$$

$$\sin \beta = \cos \beta = \frac{2}{2,83} = 0,707.$$

3 Визначаємо переміщення маси під дією статично прикладеної одиничної сили в напрямку коливань.

Для цього в точці установки двигуна (див. рис. 5.11) прикладаємо одиничну силу, тобто $P=1$.

Переміщення δ_{11} визначаємо за допомогою інтеграла Мору:

$$\delta_{11} = \int_{\ell} \frac{N_P N_1 dz}{EF} = \int_{\ell} \frac{\overline{N_1^2} dz}{EF} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 \ell_i}{EF_i}.$$

Обчислюємо значення поздовжніх сил у кожному стрижні від дії одиничної сили, розглядаючи кожен вузол окремо (рис. 5.12).

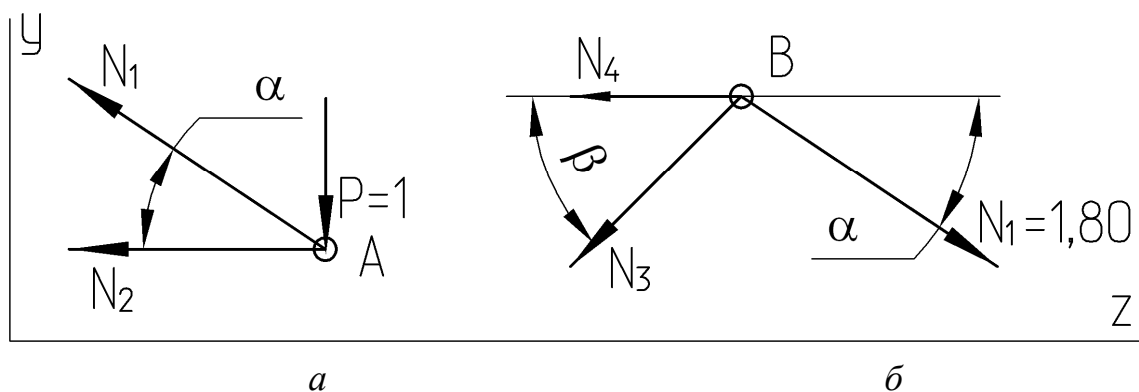


Рисунок 5.12

Розглянемо вузол А (рис. 5.12, а):

$$\sum P_y = 0,$$

$$-P + N_1 \sin \alpha = 0,$$

$$N_1 = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{1}{0,555} = 1,80.$$

$$\sum P_z = 0,$$

$$-N_1 \cos \alpha - N_2 = 0,$$

$$N_2 = -N_1 \cos \alpha = -1,80 \cdot 0,832 = -1,50.$$

Розглянемо вузол В (рис. 5.12, б):

$$\sum P_y = 0,$$

$$-N_1 \sin \alpha - N_3 \sin \beta = 0,$$

$$N_3 = -\frac{N_1 \sin \alpha}{\sin \beta} = -\frac{1,80 \cdot 0,555}{0,707} = -1,41.$$

$$\sum P_z = 0,$$

$$N_1 \cos \alpha - N_3 \cos \beta - N_4 = 0,$$

$$N_4 = N_1 \cos \alpha - N_3 \cos \beta = 1,80 \cdot 0,832 + 1,41 \cdot 0,707 = 2,50.$$

Отримані дані занесемо до таблиці 5.2 та обчислимо значення $\sum \overline{N_i^2} \ell_i$.

Таблиця 5.2

Номер стрижня	ℓ_i	$\overline{N_i}$	$\overline{N_i^2}$	$\overline{N_i^2} \ell_i$
1	3,61	1,80	3,24	11,70
2	5,00	-1,50	2,25	11,25
3	2,83	-1,41	1,99	5,63
4	2,00	2,50	6,25	12,50
				$\sum \overline{N_i^2} \ell_i = 41,08$

Визначаємо площу поперечного перерізу кільця із зовнішнім $D = 10$ см і внутрішнім $d = 9$ см діаметрами:

$$F = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{3,14}{4}(10^2 - 9^2) = 14,9 \text{ см}^4.$$

Тоді переміщення δ_{11} дорівнює:

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 \ell_i}{EF_i} = \frac{41,08}{2 \times 10^5 \times 10^6 \cdot 14,9 \times 10^{-4}} = 1,38 \times 10^{-7} \text{ м/Н}.$$

4 Визначаємо кругову частоту власних коливань:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} m}} = \sqrt{\frac{1}{1,38 \times 10^{-7} \cdot 5 \times 10^3}} = 38,1 \text{ с}^{-1}.$$

5 Визначаємо кругову частоту змушених коливань:

$$\Omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 200}{30} = 20,9 \text{ с}^{-1}.$$

6 Визначаємо коефіцієнт наростання коливань:

$$\beta = \frac{1}{\left| 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right|} = \frac{1}{\left| 1 - \frac{20,9^2}{38,1^2} \right|} = 1,43.$$

7 Визначаємо найбільше нормальне напруження при коливальному русі системи:

$$\sigma_d = \frac{N_G + N_T \beta}{F} = \frac{\bar{N}_{l \max} (G + T \beta)}{F},$$

де N_G – поздовжня сила від дії ваги двигуна;

N_T – поздовжня сила від дії відцентрової сили інерції.

При зазначеному виді навантаження $G = 50$ кН, $T = 15$ кН.

Отже,

$$\sigma_d = \frac{2,50 \cdot (50 + 15 \cdot 1,43) \times 10^{-3}}{14,92 \times 10^{-4}} = 119,8 \text{ МПа}.$$

8 Визначаємо резонансну частоту. Резонанс настає при збігу власної частоти коливань і частоти змушених коливань, тобто при

$$\omega = \Omega_p = \frac{\pi n_p}{30}.$$

Отже, резонансна частота може бути визначена:

$$n_p = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 38,1}{3,14} = 364 \text{ об/хв}.$$

5.2 Розрахунок елементів конструкцій при заданих прискореннях

Визначення напружень і переміщень при заданих прискореннях засновано на приведенні задач динаміки до задач статички за допомогою принципу Даламбера.

Цей принцип полягає в наступному: якщо в будь-який момент часу до кожної матеріальної точки даної системи прикласти силу інерції цієї точки, то ці сили інерції будуть урівноважуватися заданими силами, що діють на систему, і реакціями зв'язків, тобто система може розглядатися як перебуваюча в стані спокою (або прямолінійного руху).

Сила інерції дорівнює добутку маси матеріальної точки на її прискорення та спрямована убік, протилежний прискоренню:

$$F_{in} = ma. \quad (5.8)$$

Задача 5.6

Визначити при $[\sigma] = 70$ МПа необхідний діаметр троса, на якому підвішений вантаж масою $m_B = 3000$ кг (рис. 5.13), який піднімає з постійним прискоренням $a = 4 \text{ м/с}^2$. Масу троса не враховувати.

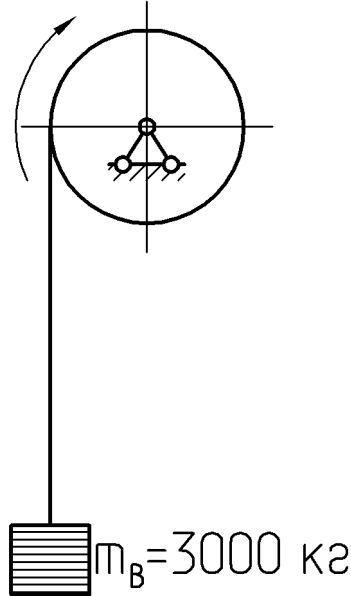


Рисунок 5.13

Розв'язання

1 Визначаємо силу ваги вантажу:

$$G = m_B g = 3000 \cdot 10 = 30000 \text{ Н} = 30 \text{ кН}.$$

2 Застосовуючи принцип Даламбера, прикладаємо до вантажу ще силу інерції:

$$F_{\text{ін}} = m_B a = 3000 \cdot 4 = 12000 \text{ Н} = 12 \text{ кН},$$

спрямовану протилежно прискоренню (рис. 5.14, а).

3 Застосовуючи метод перерізів (рис. 5.14, б), визначаємо поздовжню силу, яка виникає в поперечному перерізі троса:

$$\sum P_z = 0,$$

$$N - G - F_{\text{ін}} = 0,$$

$$N = G + F_{\text{ін}} = 30 + 12 = 42 \text{ кН}.$$

4 Підбираємо переріз з умови міцності при розтяганні:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma].$$

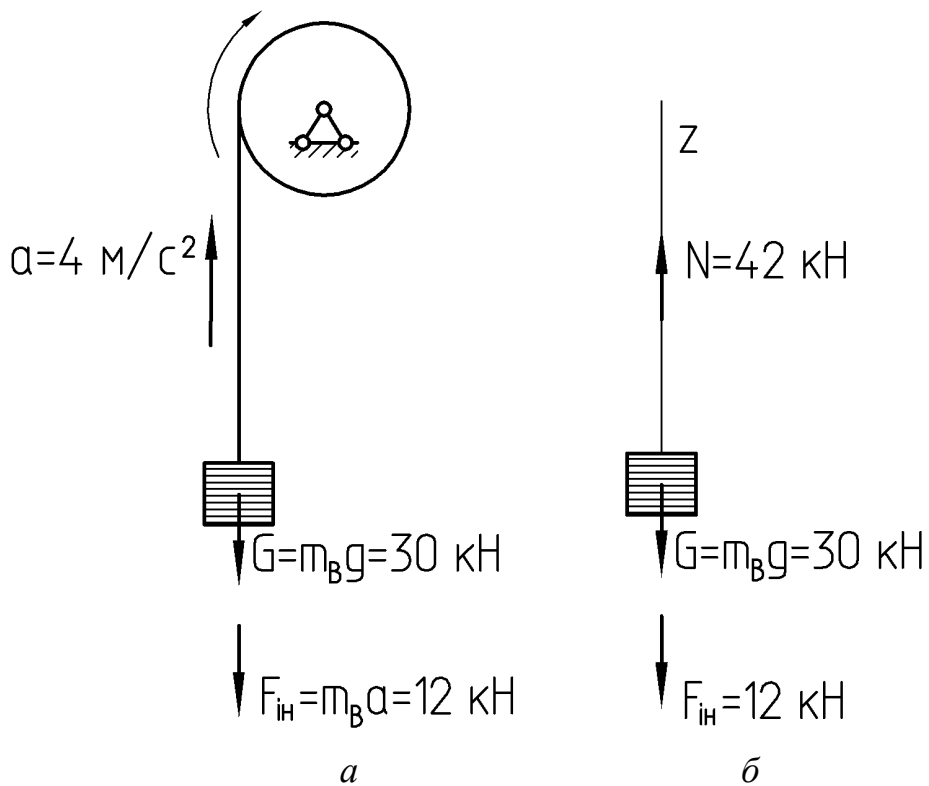


Рисунок 5.14

Звідси

$$F = \frac{N}{[\sigma]} = \frac{42 \times 10^{-3}}{70} \times 10^4 = 6 \text{ см}^2.$$

Отже,

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 6}{3,14}} = 2,8 \text{ см}.$$

Приймаємо діаметр, кратний 5 мм, тобто $d = 3 \text{ см}$.

Задача 5.7

Вагонетка з вантажем рухається по похилій площині з постійним прискоренням $a = 2 \frac{m}{c^2}$ (рис. 5.15). Визначити необхідний діаметр троса, якщо маса вагонетки з вантажем $m_B = 4000$ кг, коефіцієнт тертя $f = 0,15$, допустиме напруження для троса $[\sigma] = 60$ МПа. Масу троса не враховувати.

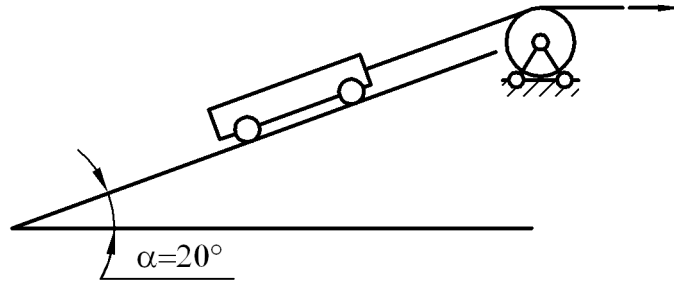


Рисунок 5.15

Розв'язання

1 Визначаємо силу ваги вантажу:

$$G = m_B g = 4000 \cdot 10 = 40000 \text{ Н} = 40 \text{ кН}.$$

2 Застосовуючи принцип Даламбера, прикладаємо до вагонетки, що рухається, силу інерції:

$$F_{\text{ин}} = m_B a = 4000 \cdot 2 = 8000 \text{ Н} = 8 \text{ кН},$$

спрямовану протилежно прискоренню (рис. 5.16).

Визначаємо значення сили тертя, спрямованої протилежно швидкості:

$$F_{\text{тр}} = f G \cos \alpha = 0,15 \cdot 40 \cdot 0,940 = 5,6 \text{ кН}.$$

3 Застосовуючи метод перерізів (рис. 5.17), визначаємо поздовжню силу, що виникає в поперечному перерізі троса:

$$\sum P_z = 0,$$

$$N - G \sin 20^\circ - F_{\text{тр}} - F_{\text{ин}} = 0,$$

$$N = G \sin 20^\circ + F_{\text{тр}} + F_{\text{ин}} = 40 \cdot 0,342 + 5,6 + 8 = 27,3 \text{ кН}.$$

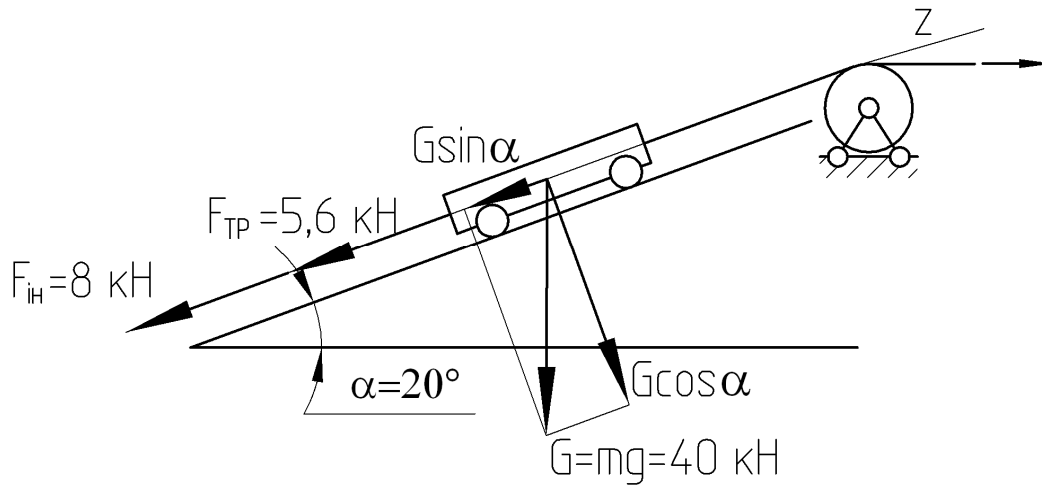


Рисунок 5.16

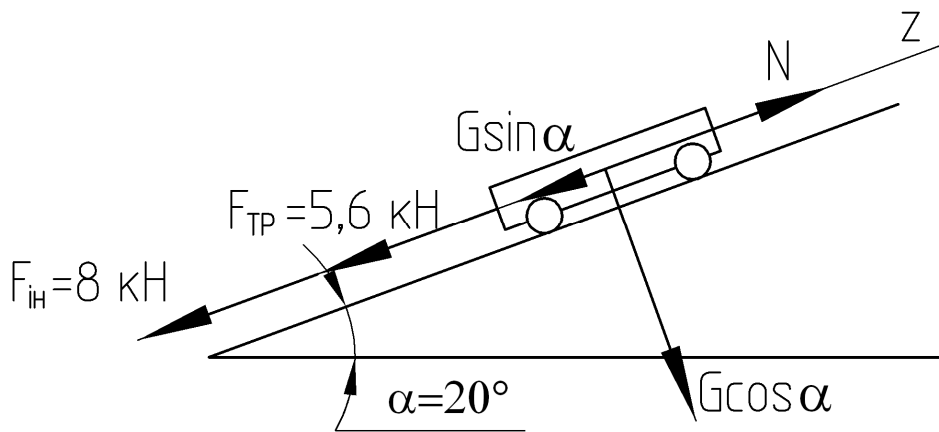


Рисунок 5.17

4 Підбираємо переріз з умови міцності при розтяганні

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma].$$

Звідси

$$F = \frac{N}{[\sigma]} = \frac{27,3 \times 10^{-3}}{60} \times 10^4 = 4,55 \text{ см}^2.$$

Отже,

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4,55}{3,14}} = 2,4 \text{ см}.$$

Приймаємо діаметр, кратний 5 мм, тобто $d = 2,5 \text{ см}$.

5.3 Розрахунок елементів конструкцій на дію ударних навантажень

Якщо тіло вагою $G = mg$ падає з висоти h на пружну систему, то відбувається ударна взаємодія, яка декілька разів перевищує ефект статичної дії сили Q .

Нехтуючи масою пружної системи, коефіцієнт динамічності k_d можна визначити за формулою

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}}, \quad (5.9)$$

де $\Delta_{ст}$ – переміщення в точці удару від статичної дії сили $G = mg$.
Переміщення Δ_d та напруження σ_d при ударі знаходять за формулами:

$$\Delta_d = k_d \Delta_{ст}, \quad (5.10)$$

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст}. \quad (5.11)$$

Задача 5.8

Вантаж масою $m_B = 1000$ кг падає з висоти $h = 5$ см на сталевий брус постійного перерізу (рис. 5.18). Визначити напруження, які виникають у поперечних перерізах бруса (без урахування власної ваги вантажу).

Розв'язання

1 Визначаємо силу ваги вантажу:

$$G = m_B g = 1000 \cdot 10 = 10000 \text{ Н} = 10 \text{ кН}.$$

2 Визначаємо площу поперечного перерізу бруса:

$$F = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = \frac{3,14 \cdot (10^2 - 8^2)}{4} = 28,3 \text{ см}^2.$$

3 Обчислимо переміщення в точці удару від статичної дії сили $G = m_B g$. Якщо сила G діє уздовж осі стрижня (рис. 5.19), то дане переміщення визначаємо за законом Гука в абсолютній формі при розтяганні. При цьому поздовжня сила $N = G = 10 \text{ кН}$.

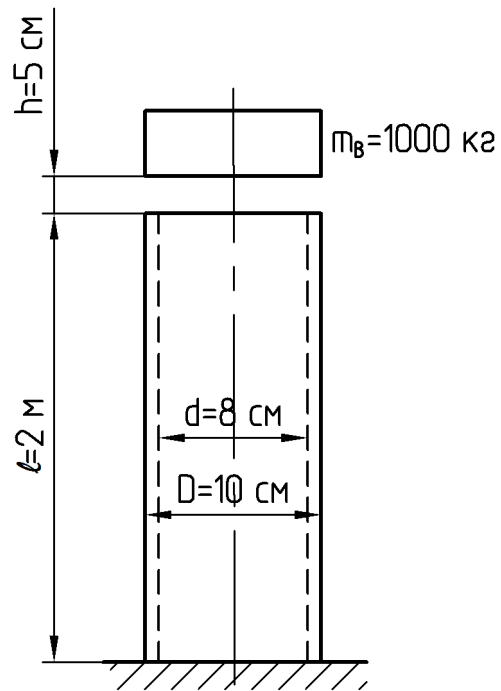


Рисунок 5.18

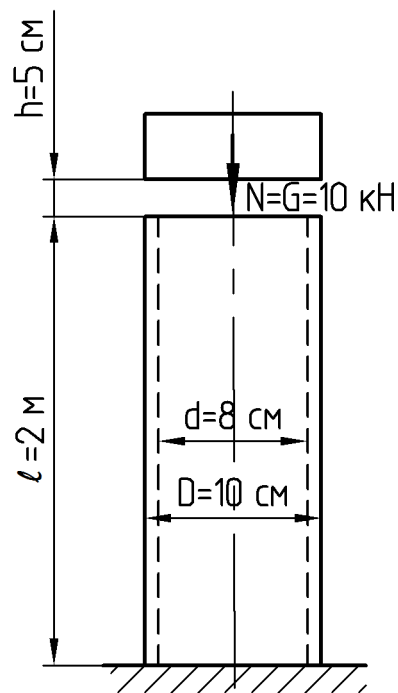


Рисунок 5.19

Одержуємо:

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{Nl}{EF} = \frac{10 \times 10^{-3} \cdot 2}{2 \times 10^5 \cdot 28,3 \times 10^{-4}} = 0,35 \times 10^{-4} \text{ м}.$$

4 Визначаємо коефіцієнт динамічності k_d :

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 5 \times 10^{-2}}{0,35 \times 10^{-4}}} = 54,5 .$$

5 Обчислимо напруження в точці удару від статичної дії сили $G = m_B g$. Так як сила G діє уздовж осі стрижня ($N = G = 10 \text{ кН}$), то дане напруження визначаємо за формулою

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{N}{F} = \frac{10 \times 10^{-3}}{28,3 \times 10^{-4}} = 3,5 \text{ МПа} .$$

6 Визначаємо напруження, що виникають у поперечних перерізах бруса:

$$\sigma_d = k_d \sigma_{\text{ст}} = 54,5 \cdot 3,5 = 190,8 \text{ МПа} .$$

Задача 5.9

Вантаж вагою $G = 0,75 \text{ кН}$ падає з висоти $h = 1 \text{ см}$ на сталеву балку двотаврового перерізу (рис. 5.20). Двотавр № 20. Зрівняти найбільші статичні та динамічні напруження і прогини під вантажем для випадків згинання у балки в площині, найбільшій та найменшій жорсткості. При розрахунку власну вагу балки не враховувати.

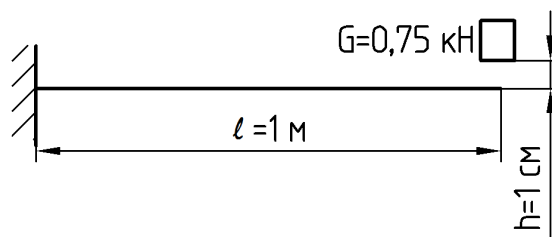


Рисунок 5.20

Розв'язання

1 Будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження (рис. 5.21, а).

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$M_1 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = -G \cdot l = -0,75 \cdot 1 = -0,75 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

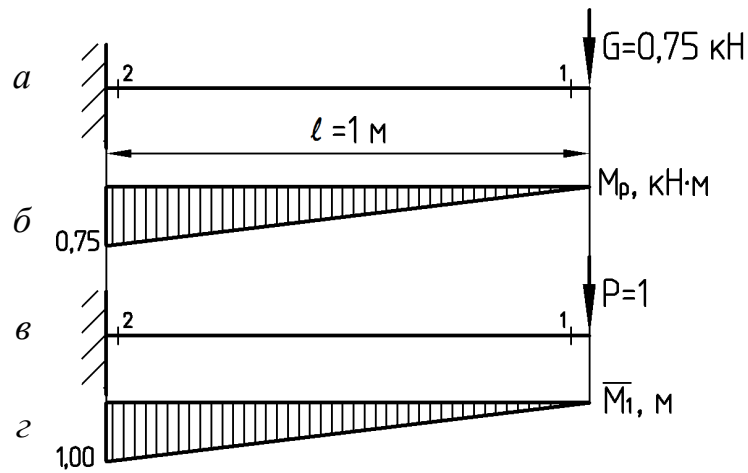


Рисунок 5.21

Будуємо епюру згинальних моментів від дії заданого навантаження за характерними перерізами (рис. 5.21, б).

2 Визначаємо переміщення в точці удару від статичної дії сили G . У точці удару прикладаємо одиничну силу, тобто $P = 1$ (рис. 5.21, в).

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах від дії одиничної сили (див. рис. 5.21, в):

$$M_1 = 0 \text{ м},$$

$$M_2 = -P \cdot 1 = -1 \cdot 1 = -1 \text{ м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничної сили за характерними перерізами (рис. 5.21, г).

3 Використанням формули крайніх ординат «перемножуємо між собою» на кожній ділянці епюри згинальних моментів від дії заданого навантаження та від дії одиничної сили:

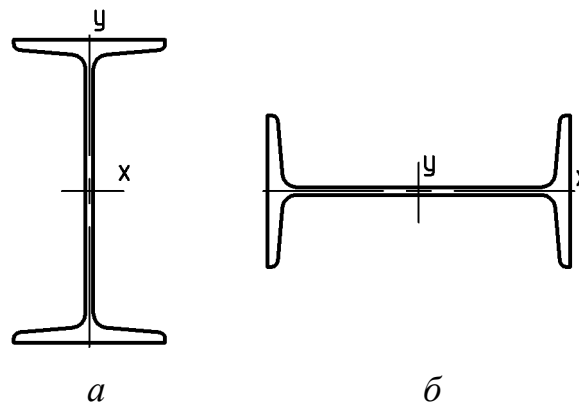
$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 0,75 \cdot 1,00) = \frac{0,25}{EJ_x}.$$

3 Обчислимо напруження в точці удару від статичної дії сили G . Найбільші нормальні напруження в поперечному перерізі балки при статичному навантаженні рівні:

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x}.$$

При зазначеному виді навантаження $M_{\text{max}} = 0,75 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

4 Розглянемо випадок згинання у балки в площині найбільшої жорсткості (рис. 5.22, а).



$$\begin{array}{ll} J_x = 1840 \text{ см}^4; & J_x = 115 \text{ см}^4; \\ W_x = 184 \text{ см}^3; & W_x = 23,1 \text{ см}^3. \end{array}$$

Рисунок 5.22

Визначаємо переміщення в точці удару від статичної дії сили G :

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{0,25}{EJ_x} = \frac{0,25 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 1840 \times 10^{-8}} = 6,79 \times 10^{-5} \text{ м}.$$

Динамічний коефіцієнт дорівнює:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1 \times 10^{-2}}{6,79 \times 10^{-5}}} = 18,2.$$

Найбільші нормальні напруження в поперечному перерізі балки при статичному навантаженні рівні:

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = \frac{0,75 \times 10^{-3}}{184 \times 10^{-6}} = 4,1 \text{ МПа}.$$

Найбільші динамічні напруження

$$\sigma_d = k_d \sigma_{\text{ст}} = 18,2 \cdot 4,1 = 74,6 \text{ МПа}.$$

Динамічний прогин

$$\Delta_d = k_d \Delta_{\text{ст}} = 18,2 \cdot 6,79 \times 10^{-5} = 123 \times 10^{-5} \text{ м} = 1,23 \text{ мм}.$$

5 Розглянемо випадок згинання балки в площині найменшої жорсткості (рис. 5.22, б).

Визначаємо переміщення в точці удару від статичної дії сили G :

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{0,25}{EJ_x} = \frac{0,25 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 115 \times 10^{-8}} = 10,9 \times 10^{-4} \text{ м}.$$

Динамічний коефіцієнт:

$$k_{\text{ä}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{по}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1 \times 10^{-2}}{10,9 \times 10^{-4}}} = 5,39.$$

Найбільші нормальні напруження в поперечному перерізі балки при статичному навантаженні рівні:

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = \frac{0,75 \times 10^{-3}}{23,1 \times 10^{-6}} = 32,5 \text{ МПа}.$$

Найбільші динамічні напруження:

$$\sigma_{\text{д}} = k_{\text{д}} \sigma_{\text{ст}} = 5,39 \cdot 32,5 = 175 \text{ МПа}.$$

Динамічний прогин:

$$\Delta_{\text{д}} = k_{\text{д}} \Delta_{\text{ст}} = 5,39 \cdot 10,9 \times 10^{-4} = 58,8 \times 10^{-4} \text{ м} = 5,88 \text{ мм}.$$

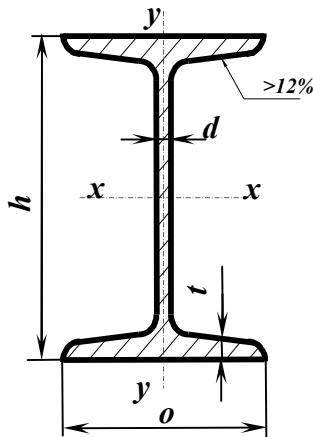
6 При статичній дії навантаження напруження в другому випадку більше, ніж у першому, у 7,93 рази, а при її ударній дії – тільки в 2,36 рази. Таке розходження обумовлене тим, що в другому випадку жорсткість балки значно менше, ніж у першому, що призводить до істотного зменшення динамічного коефіцієнта.

ЛІТЕРАТУРА

- 1 **Писаренко, Г.С.** Опір матеріалів / Г.С.Писаренко, О.Л.Квітка, Є.С.Уманський. – К. : Вища школа, 2004. – 656 с.
- 2 Справочник по сопротивлению материалов / Г.С.Писаренко, А.П.Яковлев, В.В.Матвеев. – Киев : Наук. думка, 1982. – 736 с.
- 3 Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності : у 2 ч.. / В.Г.Піскунов, В.Д.Шевченко, М.М.Рубан, Ю.М.Федоренко, І.М.Бузун, В.С.Сіпетов, В.К.Присяжнюк. – К. : Вища школа, 1995. – 5 кн. – 490 с.
- 4 **Феодосьев, В.И.** Сопротивление материалов. – М. : Наука, 1986. – 540 с.
- 5 Самостійна робота студентів з дисципліни «Опір матеріалів» : навчальний посібник / В.А.Овчаренко, Л.В.Кутовий, М.О.Соломін, О.Ю.Деньщиков. – Краматорськ : ДДМА, 2004. – 212 с.
- 6 **Кутовий, Л.В.** Збірник розрахунково-графічних завдань з курсу «Опір матеріалів» : навчальний посібник / Л.В.Кутовий, В.А.Овчаренко, Ю.С.Холодняк. – Краматорськ : ДДМА, 2007 – 220 с.
- 7 **Холодняк, Ю.С.** Побудова епюр внутрішніх силових факторів для балок і плоских рам : навчальний посібник / Ю.С.Холодняк, В.А.Овчаренко, Л.В.Кутовий. – Краматорськ : ДДМА, 2009 – 128 с.

ДОДАТКИ

Додаток А



ДВОТАВРИ сталеві гарячекатані (за ГОСТ 8239-89)

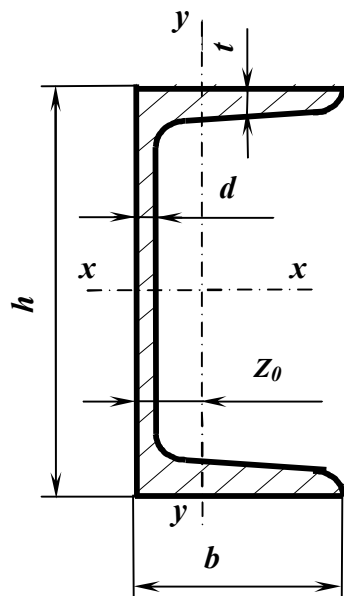
Таблиця А.1

Номер профілю	Розмір, мм				F , см ²	J_X , см ⁴	W_X , см ³	i_X , см	S_X , см ³	J_Y , см ⁴	W_Y , см ³	i_Y , см
	h	b	d	t								
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

Таблиця А.2 – Нормальні лінійні розміри, мм (за ГОСТ 6636-69)

1,0	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,5	2,8	3,2	3,6
4,0	4,5	5,0	5,6	6,3	7,1	8,0	9,0	10	11	12	14
16	18	20	22	25	28	32	36	40	45	50	56
63	71	80	90	100	110	125	140	160	180	200	220
250	280	320	360	400	450	500	560	630	710	800	900

Додаток Б



ШВЕЛЕРИ сталеві гарячекатані (за ГОСТ 8240-97 або ДСТУ 3436-96)

Приклад позначення:

Швелер 30 ГОСТ 8240-97

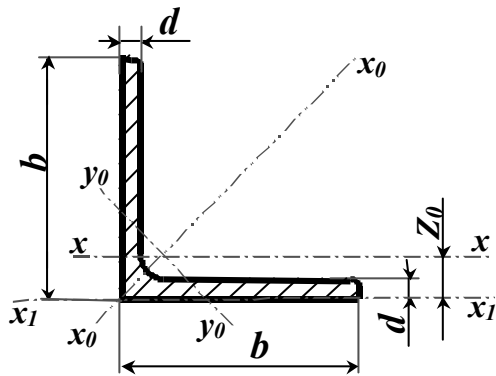
Таблиця Б.1

Номер профілю	Розмір, мм				F см ²	J_X см ⁴	W_X см ³	i_X см	S_X см ³	J_Y см ⁴	W_Y см ³	i_Y см	Z_0 см
	h	b	d	t									
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Додаток В

КУТИКИ СТАЛЕВІ

ГАРЯЧЕКАТАНІ



Таблиця В.1

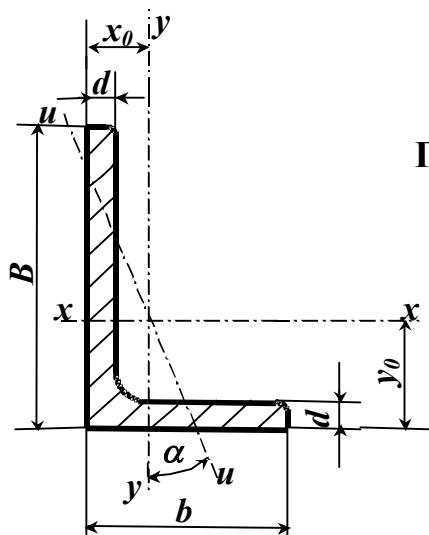
Номер кутника	Розмір, мм		F , см ²	$I_{x'}$, см ⁴	$i_{x'}$, см	I_{x_0} max, см ⁴	i_{x_0} max, см	I_{y_0} min, см ⁴	i_{y_0} min, см	z_0 , см
	b	d								
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,6	0,75	0,17	0,39	0,60
		4	1,46	0,50	0,58	0,8	0,73	0,22	0,38	0,64
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,3	0,95	0,34	0,49	0,73
		4	1,86	1,03	0,74	1,6	0,93	0,44	0,48	0,76
		5	2,27	1,22	0,73	1,9	0,92	0,53	0,48	0,80
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,8	1,07	0,48	0,55	0,80
3	30	3	1,74	1,45	0,91	2,3	1,15	0,60	0,59	0,85
		4	2,27	1,84	0,90	2,9	1,13	0,77	0,58	0,89
		5	2,78	2,20	0,89	3,5	1,12	0,94	0,58	0,93
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,8	1,23	0,74	0,63	0,89
		4	2,43	2,26	0,96	3,6	1,21	0,94	0,62	0,94
3,5	35	3	2,04	2,35	1,07	3,7	1,35	0,97	0,69	0,97
		4	2,67	3,01	1,06	4,8	1,33	1,25	0,68	1,01
		5	3,28	3,61	1,05	5,7	1,32	1,52	0,68	1,05
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,6	1,55	1,47	0,79	1,09
		4	3,08	4,58	1,22	7,3	1,53	1,90	0,78	1,13
		5	3,79	5,53	1,21	8,8	1,52	2,30	0,78	1,17
		6	4,48	6,41	1,20	10,1	1,50	2,70	0,78	1,21
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,1	1,75	2,12	0,89	1,21
		4	3,48	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	1,26
		5	4,29	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	1,30
		6	5,08	9,35	1,36	14,8	1,71	3,90	0,88	1,34
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	1,33
		4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	1,38
		5	4,80	11,20	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	1,42
		6	5,69	13,07	1,52	20,7	1,91	5,43	0,98	1,46
5,6	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	1,52
		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	1,57
6,3	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	1,69
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	1,74
		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,20	1,24	1,78
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	1,88
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	1,90
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	1,94
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	1,99
		8	10,7	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	2,02
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	2,02
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	2,06
		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	2,10
		8	11,5	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	2,15
		9	12,8	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	2,18

Продовження таблиці В.1

Номер кутника	Розмір, мм		F , см ²	I_x , см ⁴	i_x , см	I_{x0} max, см ⁴	i_{x0} max, см	I_{y0} min, см ⁴	i_{y0} min, см	z_0 , см
	b	d								
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	2,17
		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	2,19
		7	10,8	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	2,23
		8	12,3	73,4	2,34	116,0	3,08	30,3	1,57	2,27
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	2,43
		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	2,47
		8	13,9	106,0	2,76	168	3,48	43,8	1,77	2,51
		9	15,6	118,0	2,75	186	3,46	48,6	1,77	2,55
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	2,68
		7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	2,71
		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	2,75
		10	19,2	179	2,05	284	3,84	74,1	1,96	2,83
		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	2,91
		14	26,3	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	2,99
11	110	7	15,2	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	2,96
		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	3,00
12,5	125	8	19,7	294	3,37	467	4,87	122	2,49	3,36
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	3,40
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	3,45
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	3,53
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	3,61
14	140	16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	3,68
		9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	3,78
16	160	10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	3,82
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	3,90
		10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	4,30
18	180	11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	4,35
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	4,39
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	4,47
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	4,55
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	4,63
20	200	20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	4,70
		11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	4,85
22	220	12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	4,89
		12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	5,37
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	5,42
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	5,46
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	5,54
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5,70
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	5,89
25	250	30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	6,07
		14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	5,93
25	250	16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	6,02
		16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	6,75
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	6,83
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	6,91
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	7,00
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	7,11
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	7,23
		30	142,0	8117	7,59	12965	9,56	3389	4,89	7,31

Додаток Г

КУТИКИ СТАЛЕВІ ГАРЯЧЕКАТАНІ НЕРІВНОСМУЖНІ (за ГОСТ 8510-93)



Таблиця Г.1

Номер кутника	Розмір, мм			F см ²	$I_{x'}$ см ⁴	$I_{y'}$ см ⁴	I_u мин см ⁴	i_u мин см	x_0 см	y_0 см	Кут нахилу осі u , $\text{tg } \alpha$
		b	d								
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,70	0,22	0,13	0,34	0,42	0,86	0,392
3/2	30	20	3	1,43	1,27	0,45	0,26	0,43	0,51	1,00	0,427
			4	1,86	1,61	0,56	0,34	0,43	0,54	1,04	0,421
3,2/2	32	20	3	1,49	1,52	0,46	0,28	0,43	0,49	1,08	0,382
			4	1,94	1,93	0,57	0,35	0,43	0,53	1,12	0,374
4/2,5	40	25	3	1,89	3,06	0,93	0,56	0,54	0,59	1,32	0,385
			4	2,47	3,93	1,18	0,71	0,54	0,63	1,37	0,381
			5	3,03	4,73	1,41	0,86	0,53	0,66	1,41	0,374
4/3	40	39	4	2,67	4,18	2,01	1,09	0,64	0,78	1,28	0,544
			5	3,28	5,04	2,41	1,33	0,64	0,82	1,32	0,539
4,5/2,8	45	28	3	2,14	4,41	1,32	0,79	0,61	0,64	1,47	0,382
			4	2,80	5,68	1,69	1,02	0,60	0,68	1,51	0,379
5/3,2	50	32	3	2,42	6,18	1,99	1,18	0,70	0,72	1,60	0,403
			4	3,17	7,98	2,56	1,52	0,69	0,76	1,65	0,401
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,4	3,7	2,19	0,78	0,84	1,82	0,406
			5	4,41	13,8	4,48	2,66	0,78	0,88	1,86	0,404
6,3/4	63	40	4	4,04	16,3	5,16	3,07	0,87	0,91	2,03	0,397
			5	4,98	19,9	6,26	3,72	0,86	0,95	2,08	0,396
			6	5,90	23,3	7,28	4,36	0,86	0,99	2,12	0,393
			8	7,68	29,6	9,15	5,58	0,85	1,07	2,20	0,386
6,5/5	65	50	5	5,56	23,41	12,08	6,41	1,07	1,26	2,00	0,576
			6	6,60	27,46	14,12	7,52	1,07	1,30	2,04	0,575
			7	7,62	31,32	16,05	8,60	1,06	1,34	2,08	0,571
			8	8,62	35,00	18,88	9,65	1,06	1,37	2,12	0,570
7/4,5	70	45	5	5,59	27,76	9,05	5,34	0,98	1,05	2,28	0,406
7,5/5	75	50	5	6,11	34,81	12,47	7,24	1,09	1,17	2,39	0,436
			6	7,25	40,92	14,60	8,48	1,08	1,21	2,44	0,435
			7	8,37	46,77	16,61	9,69	1,08	1,25	2,48	0,435
			8	9,47	52,38	18,52	10,87	1,07	1,29	2,52	0,430

Продовження таблиці Г.1

Номер кутника	Розмір, мм			F , см ²	I_x , см ⁴	I_y , см ⁴	I_u , min см ⁴	i_u , min см	x_0 , см	y_0 , см	Кут нахилу осі u , tg α
		b	d								
8/5	80	50	5 6	6,36 7,55	41,64 48,98	12,68 14,85	7,57 8,88	1,09 1,08	1,13 1,17	2,60 2,65	0,387 0,386
8/6	80	60	6 7 8	8,15 9,42 10,6	52,06 59,61 66,88	25,18 28,74 32,15	13,61 15,58 17,49	1,29 1,29 1,28	1,49 1,53 1,57	2,47 2,52 2,56	0,547 0,546 0,544
9/5,6	90	56	5,5 6 8	7,86 8,54 11,2	65,3 70,6 90,9	19,7 21,2 27,1	11,8 12,7 16,3	1,22 1,22 1,21	1,26 1,28 1,36	2,92 2,95 3,04	0,384 0,384 0,380
10/6,3	100	63	6 7 8 10	9,59 11,1 12,6 15,5	98,3 113,0 127,0 154,0	30,6 35,0 39,2 47,1	18,20 20,83 23,38 28,34	1,38 1,37 1,36 1,35	1,42 1,46 1,50 1,58	3,23 3,28 3,32 3,40	0,393 0,392 0,391 0,387
10/6,5	100	65	7 8 10	11,2 12,7 15,7	114,0 138,3 155,5	38,3 43,0 51,7	22,77 25,24 30,60	1,41 1,41 1,40	1,52 1,56 1,64	3,24 3,28 3,37	0,415 0,414 0,410
11/7	110	70	6,5 8	11,4 13,9	142 172	45,6 54,6	26,9 32,3	1,53 1,52	1,58 1,64	3,55 3,61	0,402 0,400
12,5/8	125	80	7 8 10 12	14,1 16,0 19,7 23,4	227 256 312 365	73,7 83,0 100,0 117,0	43,4 48,8 59,3 69,5	1,76 1,75 1,74 1,72	1,80 1,84 1,92 2,00	4,01 4,05 4,14 4,22	0,407 0,406 0,404 0,400
14/9	140	90	8 10	18,0 22,2	364 444	120 146	70,3 85,5	1,98 1,96	2,03 2,12	4,49 4,58	0,411 0,409
16/10	160	100	9 10 12 14	22,9 25,3 30,0 34,7	606 667 784 897	186 204 239 272	110 121 142 162	2,20 2,19 2,18 2,16	2,23 2,28 2,36 2,43	5,19 5,23 5,32 5,40	0,391 0,390 0,388 0,385
18/11	180	110	10 12	28,3 33,7	952 1123	276 324	165 194	2,42 2,40	2,44 2,52	5,88 5,97	0,375 0,374
20/12,5	200	125	11 12 14 16	34,9 37,9 43,9 49,8	1449 1568 1801 2026	446 482 551 617	264 285 327 367	2,75 2,74 2,73 2,72	2,79 2,83 2,91 2,99	6,50 6,54 6,62 6,71	0,392 0,392 0,390 0,388
25/16	250	160	12 16 18 20	48,3 63,6 71,1 78,5	3147 4091 4545 4987	1032 1333 1475 1613	604 781 896 949	3,54 3,50 3,49 3,48	3,53 3,69 3,77 3,85	7,97 8,14 8,23 8,31	0,410 0,408 0,407 0,405

Додаток Д

КОЕФІЦІЄНТИ φ ДЛЯ РІЗНИХ МАТЕРІАЛІВ

Таблиця Д.1

Гнучкість $\lambda = \frac{\mu \ell}{i}$	Сталь Ст. 4, 3, 2	Сталь Ст5	Сталь СПК	Чавун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	-	0,25
120	0,45	0,36	0,30	-	0,22
130	0,40	0,33	0,26	-	0,18
140	0,36	0,29	0,23	-	0,16
150	0,32	0,26	0,21	-	0,14
160	0,29	0,24	0,19	-	0,12
170	0,26	0,21	0,17	-	0,11
180	0,23	0,19	0,15	-	0,10
190	0,21	0,17	0,14	-	0,09
200	0,19	0,16	0,13	-	0,08

Навчальний посібник

**ОВЧАРЕНКО Володимир Андрійович
КАПОРОВИЧ Світлана Володимирівна
ДЕНЬЩИКОВ Олександр Юрійович**

**ОПІР МАТЕРІАЛІВ
Практикум
Частина 2**

Редактор І. І. Дьякова

Комп'ютерна верстка О. С. Орда

103/2003. Підп. до друку Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. 13,02. Обл.-вид. арк. 11,01.
Тираж прим. Зам. №

Донбаська державна машинобудівна академія
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК № 1633 від 24.12.2003