

**Министерств  
о образования и науки Украины  
Донбасская государственная машиностроительная академия**

**Н.Г. Мариллов**

# **Электрические цепи однофазного синусоидального тока**

**Рекомендовано Министерством образования и науки в  
качестве учебного пособия для студентов электротехнических  
и электромеханических специальностей высших учебных  
заведений**

**Краматорск 2005**

ББК 31.211  
УДК.621.3.01  
М-26

### Рецензенты:

**В.П. Самсонов**, профессор, кандидат технических наук, заведующий кафедрой ТОЭ Национального технического университета „Х П I”.

**Г.П. Матвеев**, доцент, кандидат технических наук, проректор Донецкого института последипломного образования инженерно – педагогических работников.

**С.П. Сус**, доцент, кандидат технических наук кафедры автоматизации производственных процессов Донбасской государственной машиностроительной академии.

Рекомендовано Министерством  
образования и науки Украины в  
качестве учебного пособия  
(письмо № 14/18.2-1936  
от 11.05.2005)

Утверждено на заседании  
ученого совета ДГМА,  
протокол №6 от 24.02.05

Марилов Н.Г.

М-26 Электрические цепи однофазного синусоидального тока. –  
Краматорск: ДГМА, 2005. -292с.

ISBN 966-379-005-9

Изложены свойства, методы анализа и расчета линейных цепей однофазного синусоидального тока в установившихся режимах. По всем разделам пособия приведены вопросы для самоконтроля, примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения. Пособие предназначено для самостоятельного изучения основ электротехники студентами заочной и дневной форм обучения электротехнических и электромеханических специальностей высших учебных заведений.

ББК 31.211

© Марилов Н.Г., 2005

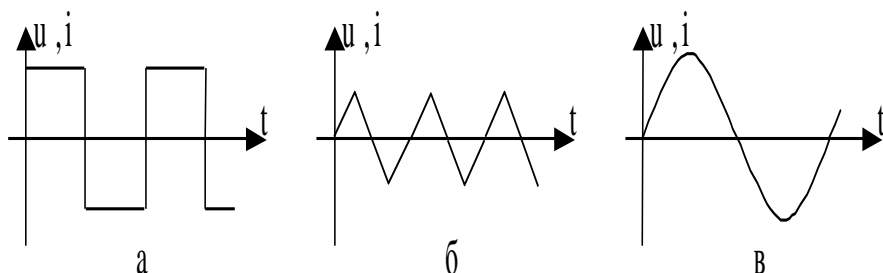
© ДГМА, 2005

ISBN 966-379-005-9

# 1 Способы получения и представления синусоидальных функций, их основные характеристики

Электрические цепи, в которых значения и направления ЭДС, напряжения и тока периодически изменяются во времени, называются *цепями переменного тока*.

Существует большое разнообразие форм переменного, периодического тока и напряжения, часть их приведена на рис.1.1,а, б, в.



*а – напряжение и ток прямоугольной формы; б – напряжение и ток треугольной формы; в – напряжение и ток синусоидальной формы*

*Рисунок 1.1– Формы переменных периодических токов и напряжений*

Из всех возможных форм переменного напряжения и тока выбрана синусоидальная, так как она имеет ряд преимуществ:

- При синусоидальной форме переменного тока меньше потери в электрических машинах и аппаратах, а значит, выше их КПД.
- Аналитическое выражение, описывающее синусоидальные токи и напряжения, является самым простым по сравнению с теми, которые описывают токи и напряжения других форм:

$$\dot{i} = I_m \sin(\omega t + \psi_i); \quad \mathbf{U} = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Например, напряжение прямоугольной формы описывается следующим выражением:

$$U(t) = \frac{4U_{\max}}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right).$$

— Синусоидальные формы напряжения и тока не искажаются на индуктивных и емкостных элементах:

$$U_L = L \frac{di}{dt}, \quad U_C = \frac{1}{C} \int i dt,$$

так как производная и интеграл от синусоидальных функций есть та же синусоидальная функция. Кроме этого, необходимо отметить, что в цепях синусоидального тока в отличие от постоянного сравнительно просто получать напряжения различных величин (преобразовывать его). Из всех электродвигателей самыми экономичными и надежными являются асинхронные электродвигатели трехфазного синусоидального тока. Синусоидальные токи используются в энергетике, электротехнике, радиотехнике, контрольно-измерительной технике и других областях.

Основную долю электрической энергии с напряжением синусоидальной формы получают на электростанциях с помощью трехфазных синхронных генераторов.

Принцип получения ЭДС синусоидальной формы можно рассмотреть и на самом простом примере вращающейся рамки из проводника электрического тока в магнитном поле. На рис. 1.2,а, б изображена рамка с длиной активной части проводника  $l$ , вращающаяся в однородном магнитном поле с угловой скоростью  $\omega$ .

В соответствии с законом электромагнитной индукции в проводниках рамки будет индуцироваться электродвижущая сила  $e$ , пропорциональная индукции магнитного поля  $B$ , длине проводника  $l$  и линейной скорости  $\mathcal{V}_l$  перемещения проводника в магнитном поле в направлении, перпендикулярном силовым линиям, (см. рис. 1.2,б):

$$e = Bl\mathcal{V}_l.$$

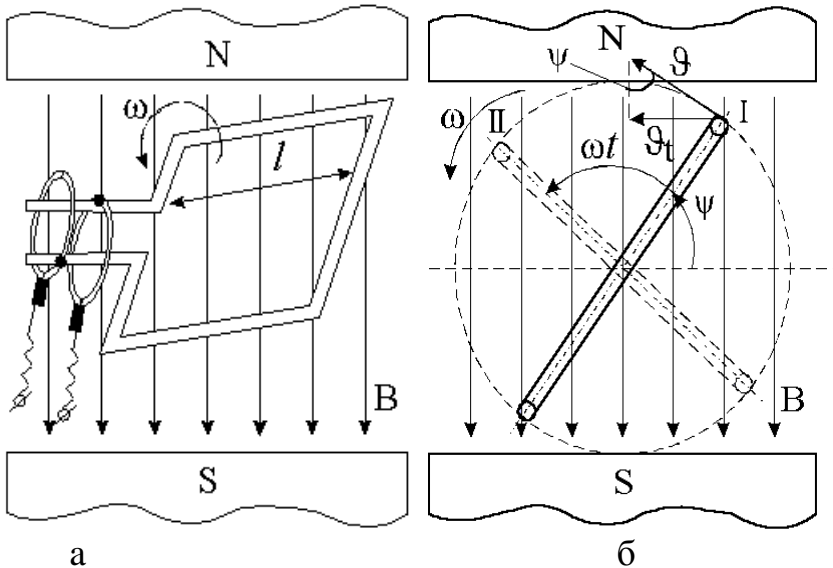


Рисунок.1.2 – Вращающаяся рамка из проводника в магнитном поле с индукцией  $B$

Учитывая, что

$$\mathcal{E} = \mathcal{E} \sin \psi, \quad e = Bl\mathcal{E} \sin \psi,$$

максимального значения ЭДС  $e$  достигает при  $\psi = 90^\circ$ . Такое значение ЭДС называют амплитудным и обозначают  $E_m$ .  $E_m = Bl\mathcal{E}$ , с учетом принятого обозначения

$$e = E_m \sin \psi. \quad (1.1)$$

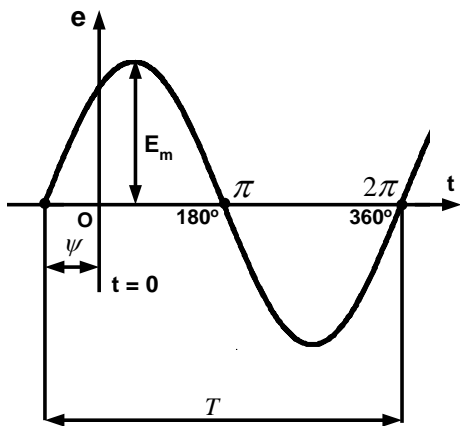
Через какое-то время  $t$  вращающаяся рамка повернется на угол  $\omega t$  и займет положение II. Для этого положения суммарный угол отклонения рамки от горизонтальной оси составит:

$\omega t + \psi$ , а ЭДС можно записать:

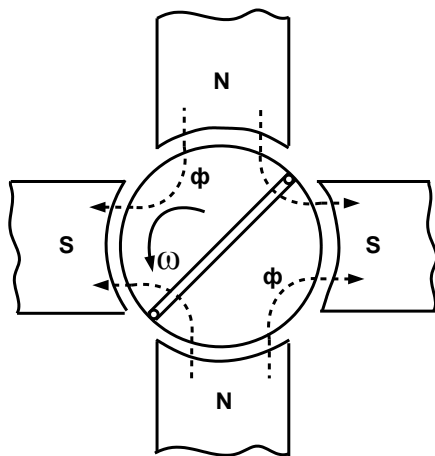
$$e = E_m \sin(\omega t + \psi). \quad (1.2)$$

Это выражение  $e$  соответствует любому времени  $t$ .

На рис.1.3 показан график изменения ЭДС во времени. Горизонтальная ось графика одновременно является осью электрических градусов (угла поворота рамки).



*Рисунок 1.3 – График изменения синусоидальной ЭДС*



*Рисунок 1.4 - Генератор синусоидального напряжения с двумя парами полюсов:  $p=2$*

Значение электрических градусов совпадает с геометрическими только в случае, когда рамка вращается в магнитном поле с одной парой полюсов:  $p = 1$ , как на рис.1.2.

В электрических машинах - генераторах синусоидального напряжения - магнитное поле может создаваться двумя или более парами полюсов:  $p = 2, 3, 4$  и т.д.

На рис.1.4 представлена схема электрического генератора синусоидального тока с двумя парами полюсов:  $p = 2$ . При повороте витка обмотки на  $180^\circ$  в каждом его проводнике ЭДС полностью завершит цикл своего изменения, т.к. виток пересечет магнитное поле двух разноименных полюсов так же, как за полный оборот на рис.1.2. В этом случае поворот витка на  $180^\circ$  геометрических соответствует изменению ЭДС на  $360^\circ$  электрических, а поворот витка на  $360^\circ$  (1 оборот) соответствует двум периодам синусоидальной ЭДС-720° электрических.

Время, в течение которого мгновенное значение ЭДС завершает полный цикл своего изменения, называется **периодом** и

обозначается буквой  $T$  (см. рис.1.3). Величину, обратную периоду, называют **циклической частотой**:

$$f = \frac{1}{T}.$$

Частота  $f$  измеряется числом периодов в секунду или герцами. Если:

$$T = 1c \rightarrow f = 1Гц;$$

$$T = 0,1c \rightarrow f = 10Гц;$$

$$T = 0,02c \rightarrow f = 50Гц.$$

Исторически сложилось так, что в европейских странах принята частота синусоидального тока 50Гц, а в США, Японии и некоторых других странах – 60Гц.

Текущее значение угла поворота рамки или витка обмотки можно представить как  $\omega t$ . Если взять время  $t$ , равное одному периоду  $T$ , то угол поворота будет равен  $360^\circ$  или  $2\pi$ :

$$\omega t = 2\pi \text{ или } \omega \frac{1}{f} = 2\pi,$$

откуда выражение **угловой частоты** принимает вид

$$\omega = 2\pi f. \quad (1.3)$$

Угловая частота  $\omega$  измеряется количеством радиан, на которое увеличивается число электрических градусов синусоидального тока или напряжения за секунду. Для частоты

$$f = 50Гц, \quad \omega = 314 \frac{\text{рад}}{c}.$$

### **Начальная фаза, сдвиг фаз**

Для определения взаимного расположения синусоид на оси электрических градусов вводится понятие начальной фазы (угол  $\psi$  на рисунках 1.2 и 1.3).

**Начальной фазой** напряжения, ЭДС или тока называют отрезок на оси электрических градусов между осью  $t=0$  и ближайшей точкой пересечения синусоидальной функцией оси абсцисс при переходе функции от отрицательного к положительному значению. На рис.1.5 начальная фаза  $e_1$  определяется отрезком 1-0, начальная фаза  $e_2$  – отрезком 0-2.

Различают положительные начальные фазы и отрицательные. Если синусоида в момент времени  $t=0$  имеет положительное значение, то и ее начальная фаза тоже положительна, при этом синусоида сдвинута от начала отсчета времени влево. Если синусоида в момент времени  $t=0$  имеет отрицательное значение, то и ее начальная фаза отрицательна, при этом синусоида от начала отсчета времени сдвинута вправо.

С учетом начальной фазы выражение для синусоидальных функций приобретает окончательный вид:

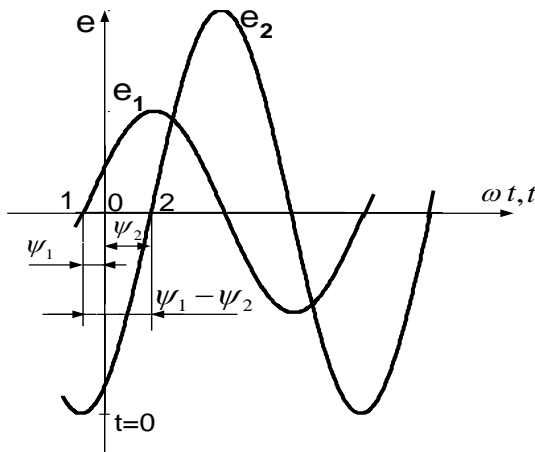
$$\dot{i} = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

На рис.1.5 представлены временные графики двух ЭДС синусоидальной формы одинаковой частоты, но с различными амплитудами и начальными фазами:

$$e_1 = E_{m1} \sin(\omega t + \psi_1), \quad (1.4)$$

$$e_2 = E_{m2} \sin(\omega t + \psi_2), \quad (1.5)$$

при этом начальная фаза ЭДС  $e_1$  – положительная, ( $\psi_1 > 0$ ), а ЭДС  $e_2$  – отрицательная, ( $\psi_2 < 0$ ).



Если у двух синусоидальных функций одной и той же частоты начала не совпадают, то говорят, что они сдвинуты по фазе. **Угол сдвига фаз** определяют как разность начальных фаз. Для синусоид, указанных на рис.1.5, угол сдвига фаз определится:  $\psi_1 - \psi_2$ , причем ЭДС  $e_1$  – опережающая синусоида, а ЭДС  $e_2$  – отстающая.

*Рисунок 1.5 – Синусоиды двух ЭДС ( $e_1$  и  $e_2$ ) с начальными фазами соответственно  $\psi_1$  и  $\psi_2$*



Если синусоидальные функции имеют одинаковые начальные фазы, *они совпадают по фазе*, если разность начальных фаз равна  $\pm 90^\circ$ , то говорят, что синусоиды находятся *в квадратуре*, если разность начальных фаз равна  $\pm 180^\circ$  – находятся *в противофазе*. Подводя итог рассмотренному, необходимо отметить, что всякая синусоидальная функция *характеризуется тремя величинами: амплитудой* ( $U_m$ ,  $I_m$ ,  $E_m$  и т.д.), *частотой* ( $f$  или  $\omega$ ) и *начальной фазой* ( $\psi$ ).

## 2 Действующие и средние значения синусоидальных величин, коэффициенты, характеризующие формы переменных периодических величин

### 2.1 Действующие значения синусоидальных величин

В электротехнике большинство расчетов выполняется в действующих значениях напряжения и тока. Эти значения синусоидальных величин выбраны не случайно. Именно с использованием действующих значений тока производят расчеты тепловой энергии, выделяемой проводником или нагревательными элементами, крутящих моментов на валу электродвигателей, тяговых усилий электромагнитов и т.д. Электроизмерительные приборы электромагнитной, электродинамической и тепловой систем проградуированы и измеряют также действующие значения токов и напряжений.

За *действующее значение* переменного тока принято такое значение постоянного тока, при котором за время  $t$ , равное периоду переменного  $T$ , в проводнике выделяется такое же количество тепла, как и при переменном.

При постоянном токе за время  $T$  в проводнике с сопротивлением  $R$  выделяется тепло, определяемое следующим выражением:

$$Q_{\text{пост}} = I^2 RT .$$

При переменном токе за то же самое время

$$Q_{\text{пер}} = \int_0^T i^2 R dt .$$

В соответствии с определением действующего значения тока:

$$Q_{\text{пер}} = Q_{\text{пост}} \quad \text{или} \quad I^2 RT = \int_0^T i^2 R dt ,$$

откуда

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} , \quad (2.1)$$

т.е. действующее значение тока равно среднему квадратичному значению за период.

Формула (2.1) справедлива для любой формы периодического тока. Для определения действующего значения тока синусоидальной формы (рис.2.1) необходимо в формулу (2.1) подставить выражение для его мгновенного значения -  $i = I_m \sin \omega t$  :

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [I_m \sin \omega t]^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} , \\ I &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m . \end{aligned} \quad (2.2)$$

Аналогичные выражения имеют действующие значения напряжения и ЭДС:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 U_m ; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 0,707 E_m .$$

Действующие значения синусоидальных величин принято обозначать прописными буквами:  $I$ ,  $U$ ,  $E$  и т.д.

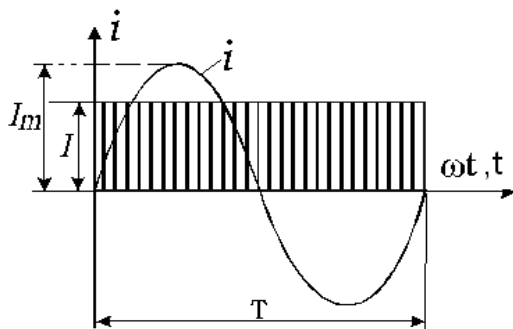


Рисунок 2.1 - Действующее значение синусоидального тока

## 2.2 Средние значения синусоидальных величин

За *среднее значение переменного* тока принимают такое значение постоянного тока, при котором за время, равное половине периода переменного, через поперечное сечение проводника проходит такое же количество электричества, как и при переменном.

Количество электричества, которое проходит через поперечное сечение проводника за время  $dt$  (рис.2.2), определяется:  $dq = idt$ .

$$\text{За половину периода синусоидального тока } q = \int_0^{T/2} i dt .$$

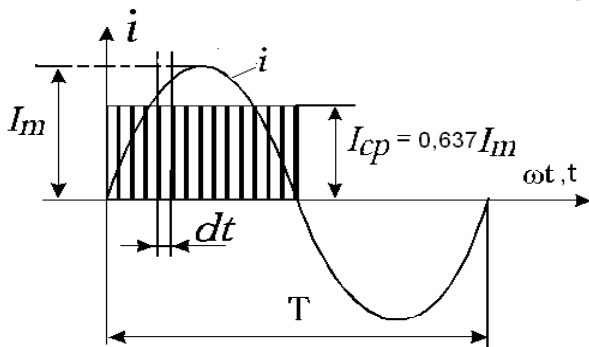


Рисунок 2.2 - Среднее значение синусоидального тока

Последнее выражение определяет площадь, ограниченную полуволной синусоиды тока. Если его разделить на длину полупериода  $T/2$ , получим среднее значение тока за половину периода:

$$I_{cp} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} i dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i dt. \quad (2.3)$$

Выражение (2.3) справедливо для переменного периодического тока любой формы. Для определения среднего значения тока синусоидальной формы подставляют в равенство (2.3) выражение для его мгновенного значения-

$$i = I_m \sin \omega t :$$

$$I_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} I_m = 0,637 I_m. \quad (2.4)$$

Те же выражения для напряжения и ЭДС:

$$U_{cp} = \frac{2}{\pi} U_m = 0,637 U_m,$$

$$E_{cp} = \frac{2}{\pi} E_m = 0,637 E_m.$$

Средние значения токов и напряжений используют в расчетах преобразователей напряжения и тока (выпрямителей, инверторов), сглаживающих фильтров, цепей управления и режимов работы многочисленных исполнительных механизмов, получающих электрическую энергию от преобразователей напряжения.

## 2.3 Коэффициенты формы, амплитуды и искажения

Кроме напряжений и токов синусоидальной формы в электроэнергетике, электронике и радиотехнике используют

периодические напряжения и токи других форм: прямоугольной (см. рис.1.1,а), треугольной (см. рис.1.1,б), трапецеидальной и т.д. Для оценки таких кривых (сравнения их с синусоидальной формой) используют коэффициенты формы  $K_\phi$ , амплитуды  $K_a$ , искажения  $K_u$ .

**Коэффициент формы** определяется как отношение действующего значения напряжения или тока к его среднему по модулю значению, например, для тока

$$K_\phi = \frac{I}{I_{cp}}.$$

Для синусоидальной формы

$$K_\phi = \frac{I}{I_{cp}} = \frac{I_m / \sqrt{2}}{2/\pi I_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11.$$

**Коэффициент амплитуды** равен отношению максимального (амплитудного) значения к действующему:

$$K_a = \frac{I_m}{I}.$$

Для синусоидальной формы

$$K_a = \frac{I_m}{I} = \frac{I\sqrt{2}}{I} = \sqrt{2} = 1,41.$$

Для несинусоидальных кривых, приведенных на рис.1.1,а и б, эти коэффициенты имеют следующие значения:

для прямоугольной формы-

$$K_\phi = 1; K_a = 1;$$

для треугольной формы-

$$K_\phi = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,154; K_a = \sqrt{3} = 1,733.$$

Из математики известно, что всякую несинусоидальную периодическую функцию, удовлетворяющую условиям Дирихле (а

в электротехнике рассматриваются именно такие функции), можно разложить в ряд Фурье, который в общем случае содержит постоянную составляющую и ряд гармонических (синусоидальных) составляющих. Например, пусть для какого-либо периодического напряжения несинусоидальной формы аналитическое выражение имеет следующий вид:

$$u(t) = U_0 + U_{m1} \sin(\omega t + \psi_1) + U_{m2} \sin(2\omega t + \psi_2) + U_{m3} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots + U_{mk} \sin(k\omega t + \psi_k), \quad (2.5)$$

где  $U_0$  - постоянная составляющая напряжения (присутствует не у всех несинусоидальных периодических кривых);  $U_{m1}$  - амплитуда основной гармоники, имеет ту же частоту, что и несинусоидальная кривая, у некоторых кривых при отсутствии первой гармоники это может быть вторая, при отсутствии второй - третья и т.д;

$U_{m2} \dots U_{mk}$  - амплитуды высших гармонических составляющих, причем с увеличением порядкового номера гармоники ее частота увеличивается, а амплитуда уменьшается.

Для такой кривой тоже можно подсчитать действующее значение, только определяется оно как корень квадратный из квадрата постоянной составляющей плюс сумма квадратов действующих значений всех гармонических составляющих:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_k^2}.$$

**Коэффициент искажения** определяется как отношение действующего значения основной гармоники к действующему значению всей кривой. Для кривой напряжения, выраженной уравнением (2.5),

$$K_u = \frac{U_1}{U}.$$

Кривые напряжения промышленных сетей обычно отличаются от идеальной синусоиды, поэтому в электроэнергетике вводят понятие напряжения **практически синусоидальной кривой**. Это такая кривая, у которой действующие значения всех высших гармоник не превышают 5% действующего значения напряжения основной частоты, т.е. основной гармоники. Коэффициент

искажения такой кривой практически равен единице, как и для идеальной синусоиды.

Измеряют синусоидальные (и несинусоидальные) токи и напряжения измерительными приборами различных систем. Приборы электродинамической, электромагнитной и тепловой систем реагируют на действующие значения измеряемой величины. Магнитоэлектрические приборы сами по себе измеряют постоянную составляющую, а с выпрямителями – среднее по модулю значение. Амплитудные электронные вольтметры реагируют на максимальные (амплитудные) значения. Шкалы приборов последней системы градуируют в действующих значениях синусоидальных кривых, поэтому при измерении напряжений и токов, у которых коэффициенты формы и амплитуды отличаются от значений  $K_\phi = 1,11$ ,  $K_a = 1,41$ , эти приборы могут давать большую погрешность.

## 3 Изображение синусоидальных функций вращающимися векторами

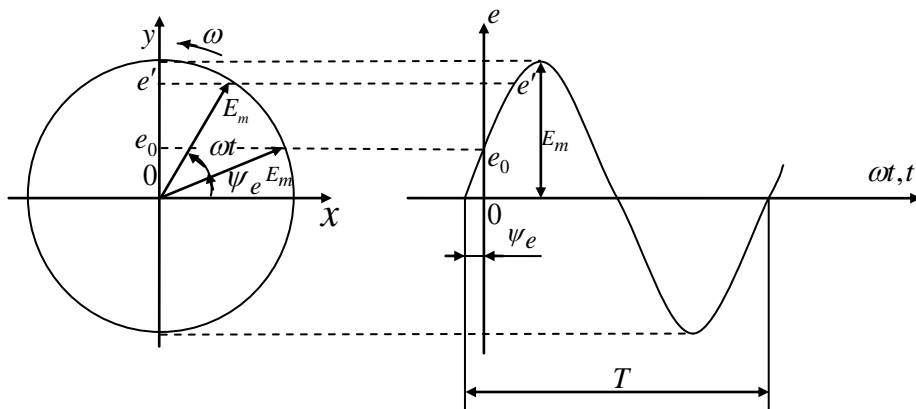
### 3.1 На обычной плоскости

Синусоидальные функции графически могут изображаться не только в виде синусоид, но и вращающимися векторами. Для этого необходимо принять длину вектора, равной амплитудному значению, а угловую частоту вращения вектора - равной угловой частоте синусоидальной функции  $\omega$ ; угол первоначального положения вектора относительно горизонтальной оси должен быть равен начальной фазе  $\psi$ .

За положительное направление вращения принимается направление против часовой стрелки.

Мгновенное значение функции в каждый момент времени определяется проекцией вращающегося вектора на вертикальную ось:

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e).$$



*Рисунок 3.1 - Соответствие между положениями вращающегося вектора  $E_m$  и графиком синусоидальной функции  $e$*

Из рис.3.1 видно, что каждому значению времени  $t$  (или электрического угла  $\omega t$ ) будет соответствовать свое положение  $E_m$ , а проекция вектора  $E_m$  на ось ординат определяет текущее значение ЭДС:  $e_0$ ,  $e'$  и т.д. Полному циклу изменения ЭДС соответствует один оборот вектора  $E_m$ . Представление синусоидальных величин одной и той же частоты вращающимися векторами дает возможность заменить операции с синусоидальными функциями на операции с векторами, что значительно упрощает расчеты. Пусть, например, даны две ЭДС одной частоты:

$$e_1 = E_{m1} \sin(\omega t + \psi_1) \text{ и } e_2 = E_{m2} \sin(\omega t + \psi_2).$$



Если их представить вращающимися векторами  $\overline{E}_{m1}$  и  $\overline{E}_{m2}$ , как показано на рис.3.2, то, для получения результирующей ЭДС  $\overline{E}_{m3}$  достаточно геометрически сложить эти векторы, а затем взять проекцию суммарного вектора на ось ординат:

$$e_3 = E_{m3} \sin(\omega t + \psi_3).$$

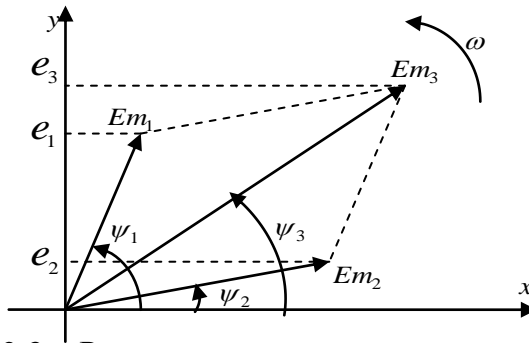


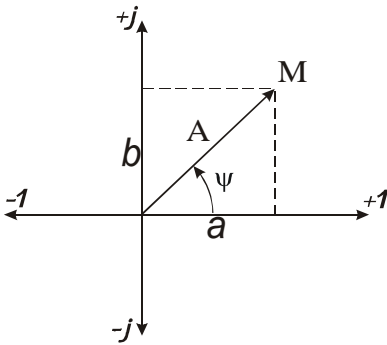
Рисунок 3.2 - Вращающиеся векторы синусоидальных ЭДС  $E_{m1}$  и  $E_{m2}$  и их суммарное значение  $E_{m3}$

## 3.2 На комплексной плоскости

### 3.2.1 Общие сведения о комплексных числах

Для расчета электрических цепей переменного тока с применением комплексных чисел необходимо знать способы выражения комплексных чисел и алгебраические действия над ними.

Комплексное число состоит из двух слагаемых:



*Рисунок 3.3 - Изображение комплексного числа вектором на комплексной плоскости*

первое слагаемое  $a$  – действительное число, а второе  $jb$  – мнимое. Мнимое число есть произведение действительного числа  $b$  и мнимой единицы  $j$ ,

где  $j = \sqrt{-1}$ .

Выражение (3.1) является алгебраической формой комплексного числа. Это число можно представить в виде вектора на комплексной плоскости (рис.3.3).

$$\underline{A} = a + jb . \quad (3.1)$$

По горизонтальной оси от начала координат откладывается действительное число в соответствии со своим знаком, а по вертикальной – мнимое.

Определив на осях действительную и мнимую части комплексного числа, можно на комплексной плоскости найти единственную точку  $M$ , соответствующую заданному комплексному числу.

Положение точки  $M$  на комплексной плоскости можно определить также длиной отрезка  $A$  и углом  $\psi$  между направлением этого отрезка и положительным направлением действительной оси. Длина отрезка  $A$  в определенном масштабе выражает абсолютное значение какой-либо величины или модуль комплексного числа:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} ,$$

а угол  $\psi$  является его аргументом:

$$\psi = \text{arctg} \frac{b}{a} .$$

Любому комплексному числу на комплексной плоскости соответствует один вектор, который также как и любой вектор на комплексной плоскости, проведенный из начала координат, можно выразить комплексным числом, определяющим только одну точку, в которой лежит конец вектора.

Из рис.3.3:

$$a = A \cos \psi; \quad b = A \sin \psi;$$

$$\underline{A} = a + jb = A \cos \psi + jA \sin \psi = A(\cos \psi + j \sin \psi).$$

Из математики

$$\cos \psi + j \sin \psi = e^{j\psi},$$

где  $e$  – основание натурального логарифма.

На основании этого комплексное число можно выразить в показательной форме:

$$A = a + jb = A(\cos \psi + j \sin \psi) = Ae^{j\psi}.$$

*Существуют три формы комплексного числа:*

показательная -  $Ae^{j\psi}$ ;

тригонометрическая -  $A \cos \psi + jA \sin \psi$ ;

алгебраическая -  $a + jb$ ;

$$Ae^{j\psi} = A \cos \psi + j \sin \psi = a + jb.$$

### **3.2.2 Векторы синусоидальных величин на комплексной плоскости**

Было отмечено, что каждому вектору на комплексной плоскости соответствует только одно комплексное число. Это дает основание от графического (векторного) выражения синусоидальных напряжений и токов перейти к аналитическому выражению их комплексными числами, а графические операции с векторами заменить алгебраическими операциями с комплексными числами.

Пусть ток в цепи определяется следующим выражением:

$$\dot{i} = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

На комплексной плоскости (рис.3.4) под углом  $\psi$  от положительного направления оси действительных чисел отложим вектор, длина которого равна амплитудному значению тока  $I_m$ .

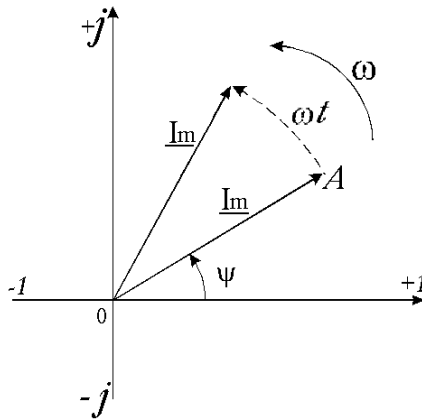


Рисунок 3.4 - Вектор тока на комплексной плоскости

Точке А на комплексной плоскости будет соответствовать комплексное число, которое запишем в показательной форме:  $I_m e^{j\psi}$ . Заставим вращаться вектор  $I_m$  против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$ . За время  $t$  вектор повернется на угол  $\omega t$ .

Комплексное число, соответствующее последнему положению вектора,-

$$I_m e^{j(\omega t + \psi)}. \quad (3.2)$$

Представим это число в тригонометрической форме:

$$I_m e^{j(\omega t + \psi)} = I_m \cos(\omega t + \psi) + j I_m \sin(\omega t + \psi),$$

где  $I_m \cos(\omega t + \psi)$  - действительная часть комплексного числа;  $j I_m \sin(\omega t + \psi)$  - мнимая часть комплексного числа, а коэффициент при  $j$  есть выражение мгновенного тока.

Следовательно, для перехода от комплексного выражения тока к его мгновенному значению необходимо комплексное число представить в тригонометрической форме и взять его мнимую часть. Вернёмся к равенству (3.2):

$$I_m e^{j(\omega t + \psi)} = I_m e^{j\psi} e^{j\omega t}.$$

В последнем выражении множитель  $e^{j\omega t}$  называют оператором поворота. Он указывает угловую частоту напряжения и тока в цепи или угловую скорость вращения векторов на комплексной плоскости. Поскольку, как правило, рассчитываются цепи, где все токи и напряжения имеют одну и ту же частоту, оператор поворота в расчетах не учитывают, о нем как бы «забывают», но обязательно «вспоминают» как только необходимо перейти от комплексных значений синусоидальных величин к их мгновенным значениям или при выполнении математических преобразований с комплексными числами.

В оставшемся выражении  $I_m$  называют модулем комплексного числа, а  $\psi$  - его аргументом. Всё это выражение обозначают как модуль с точкой вверху и называют комплексной амплитудой тока:

$$I_m e^{j\psi} = \dot{I}_m. \quad (3.3)$$

Так как чаще всего расчеты выполняются для действующих значений синусоидальных величин, разделим обе части равенства (3.3) на  $\sqrt{2}$  и получим выражение для комплексного действующего значения тока:

$$I e^{j\psi} = \dot{I}.$$

### **3.2.3 Действия с синусоидальными величинами, выраженными комплексными числами**

Пусть в двух параллельных ветвях имеются токи, мгновенные выражения которых имеют следующий вид:

$$\dot{i}_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \psi_1); \quad \dot{i}_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \psi_2),$$

при этом  $\dot{i}_3 = \dot{i}_1 + \dot{i}_2$ .

Для определения тока в неразветвленной части цепи токи необходимо сложить. Представим их в комплексной форме:

$$\dot{i}_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \psi_1) \rightarrow I_{m1} e^{j\psi_1} e^{j\omega t};$$

$$\dot{i}_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \psi_2) \rightarrow I_{m2} e^{j\psi_2} e^{j\omega t}.$$

Оператор поворота токов  $e^{j\omega t}$  учитывать в расчетах не будем, а оставшееся выражение обозначим комплексными амплитудами:

$$\dot{I}_{m1} = I_{m1} e^{j\psi_1},$$

$$\dot{I}_{m2} = I_{m2} e^{j\psi_2}.$$

С комплексными числами, представленными в показательной форме, удобно проводить операции деления и умножения. Операции сложения и вычитания удобно выполнять, если комплексные числа заданы в алгебраической форме:

$$\dot{I}_{m1} = I_{m1} e^{j\psi_1} = I_{m1} \cos\psi_1 + jI_{m1} \sin\psi_1 = a_1 + jb_1,$$

$$\dot{I}_{m2} = I_{m2} e^{j\psi_2} = I_{m2} \cos\psi_2 + jI_{m2} \sin\psi_2 = a_2 + jb_2.$$

Ток в неразветвленной части цепи

$$\dot{I}_{m3} = \dot{I}_{m1} + \dot{I}_{m2} = a_1 + jb_1 + a_2 + jb_2 =$$

$$= (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) = a_3 + jb_3,$$

где  $a_3 = a_1 + a_2$ ;  $b_3 = b_1 + b_2$ .

Переведем ток  $\dot{I}_{m3}$  в показательную форму и перейдем к выражению для мгновенного значения:

$$\dot{I}_{m3} = a_3 + jb_3.$$

Модуль тока

$$\dot{I}_{m3} = \sqrt{a_3^2 + b_3^2}.$$

Аргумент

$$\psi_3 = \operatorname{arctg} \frac{b_3}{a_3}.$$

Показательная форма записи – комплексное амплитудное значение:

$$\dot{I}_{m3} = I_{m3} e^{j\psi_3}.$$

Показательная форма с оператором поворота -

$$\dot{I}_{m3} e^{j\omega t} = I_{m3} e^{j\psi_3} e^{j\omega t}.$$

Выражение для мгновенного значения-

$$\dot{I}_3 = I_{m3} \sin(\omega t + \psi_3).$$

Метод расчета цепей с применением комплексных чисел называют символическим, он будет рассмотрен в последующих разделах.

## 4. ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ К РАЗДЕЛАМ 1-3

### 4.1 Контрольные вопросы

- 1 Какой ток называется переменным?
- 2 Назовите преимущества синусоидальной формы перед другими формами переменного напряжения.
- 3 Как можно получить ЭДС синусоидальной формы?
- 4 Начертите график зависимости ЭДС синусоидальной формы от времени.
- 5 Какое значение синусоидальной величины называют амплитудным?
- 6 Чем отличаются электрические градусы от геометрических?
- 7 Что называется периодом синусоидальной величины?
- 8 Дайте определение частоты  $f$  переменного тока. В каких единицах она измеряется?
- 9 Чему равна стандартная частота  $f$  в энергосистемах стран, расположенных на территории СНГ?
- 10 Что такое угловая частота синусоидальных величин, в каких единицах она измеряется?
- 11 Что называют начальной фазой синусоидальной величины?
- 12 Какой электрический угол называют углом сдвига фаз?
- 13 Какие синусоиды расположены по отношению друг к другу в фазе, в противофазе, в квадратуре?

- 14 Какими величинами характеризуется любая синусоидальная функция?
- 15 Что называется действующим значением синусоидальной величины? В каком соотношении она находится с амплитудным значением?
- 16 Что называется средним значением синусоидальной величины? В каком соотношении она находится с амплитудным значением?
- 17 Где используются действующие и средние значения синусоидальных величин?
- 18 Что такое коэффициенты формы, амплитуды и искажения, и как они определяются?

## 4.2 Примеры решения задач

### *Пример 1*

Переменный электрический ток задан выражением

$$i = 141 \sin(314t - 60^\circ) \text{ A}.$$

Определить период этого тока, частоту и его мгновенное значение при  $t_0 = 0 \text{ c}$  и  $t_1 = 0,005 \text{ c}$ , построить график тока.

#### Решение

Уравнение синусоидального тока в общем случае имеет вид

$$i = I_m \sin(\omega t \pm \psi).$$

Сопоставляя это уравнение с заданным частным уравнением тока, устанавливаем, что его амплитуда  $I_m = 141 \text{ A}$ , угловая частота  $\omega = 314 \text{ рад/с}$ , начальная фаза  $\psi = -60^\circ$ .

$$\text{Частота тока } \omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{2\pi} = 50 \text{ Гц}.$$

$$\text{Период тока } T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ c}.$$



Мгновенное значение тока найдем, подставив в уравнение тока заданные значения времени:

при  $t_0 = 0c$  -

$$i_0 = 141 \sin(314 \cdot 0 - 60^\circ) = 141 \sin(-60^\circ) = -121,2A;$$

при  $t = 0,005c$  -

вначале приведем в соответствие радианы и градусы, в которых выражена начальная фаза тока  $\omega t$ . Единица угловой частоты  $\omega$  – радиан в секунду, времени  $t$  – секунда, произведение  $\omega t$  имеет единицу радиан.

Переведем радианы в градусы. В окружности ( $360^\circ$ ) содержится  $2\pi$  радиан, переводной коэффициент -  $360^\circ / 2\pi$ .

$$\begin{aligned} \sin(314t - 60^\circ) &= \sin(314 \cdot 0,005 \frac{360^\circ}{2\pi} - 60^\circ) = \\ &= \sin(0,25 \cdot 360^\circ - 60^\circ) = \sin(90^\circ - 60^\circ) = \sin(30^\circ), \\ i_1 &= 141 \sin 30^\circ = 70,5A \end{aligned}$$

Для построения графика  $i(\omega t)$  нужно определить ряд значений тока, соответствующих различным моментам времени от 0 до  $0,02c$ , так, как было рассчитано для времени  $t_1$ . Ограничимся приближенным построением графика тока, по нескольким контрольным точкам: значению тока при  $t = t_0$  (т.1), положительному и отрицательному амплитудным значениям (т.3,5), а также по трем точкам на горизонтальной оси электрических градусов, когда ток равен нулю: значение начальной фазы ( $-60^\circ$ ); через  $180^\circ$  после начальной фазы, когда ток переходит от положительного к отрицательному значению; через  $360^\circ$  от начальной фазы, когда ток переходит от отрицательного к положительному значению (соответственно точки 2, 4, 6).

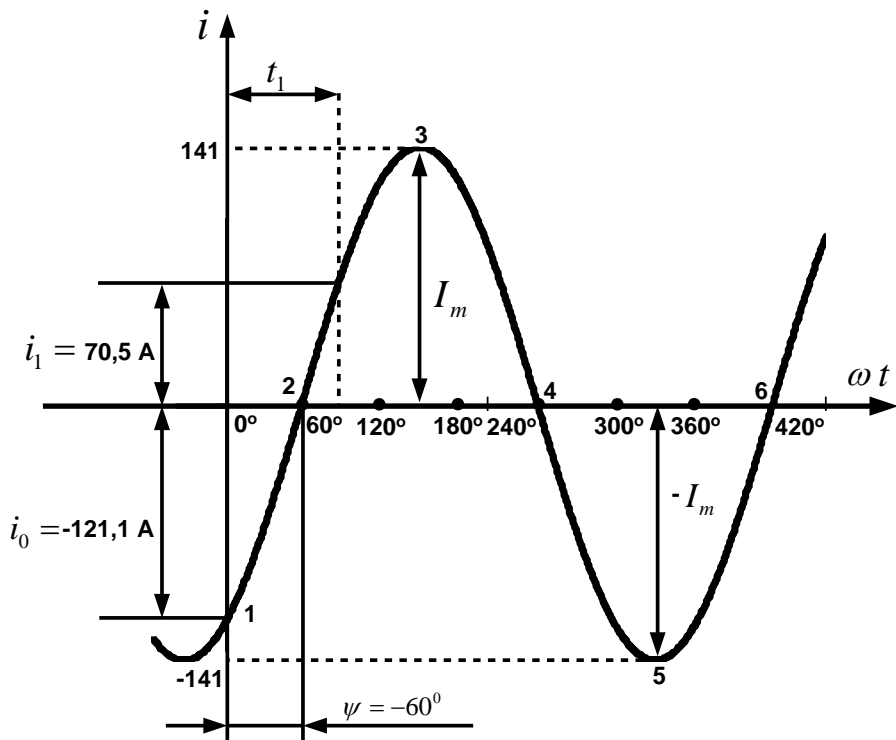


Рисунок 4.1 - График тока к примеру 1

### Пример 2

На рис.4.2 изображены графики двух ЭДС одинаковой частоты. Написать уравнения кривых и определить угол сдвига фаз между ними.

#### Решение

Общее выражение для ЭДС-  $e = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$ .

Каждая ЭДС характеризуется тремя величинами: амплитудным значением  $E_m$ , частотой ( $\omega$  или  $f$ ), начальной фазой  $\psi$ .

Из графика для двух ЭДС:

$$E_{m1} = 30B; E_{m2} = 50B;$$

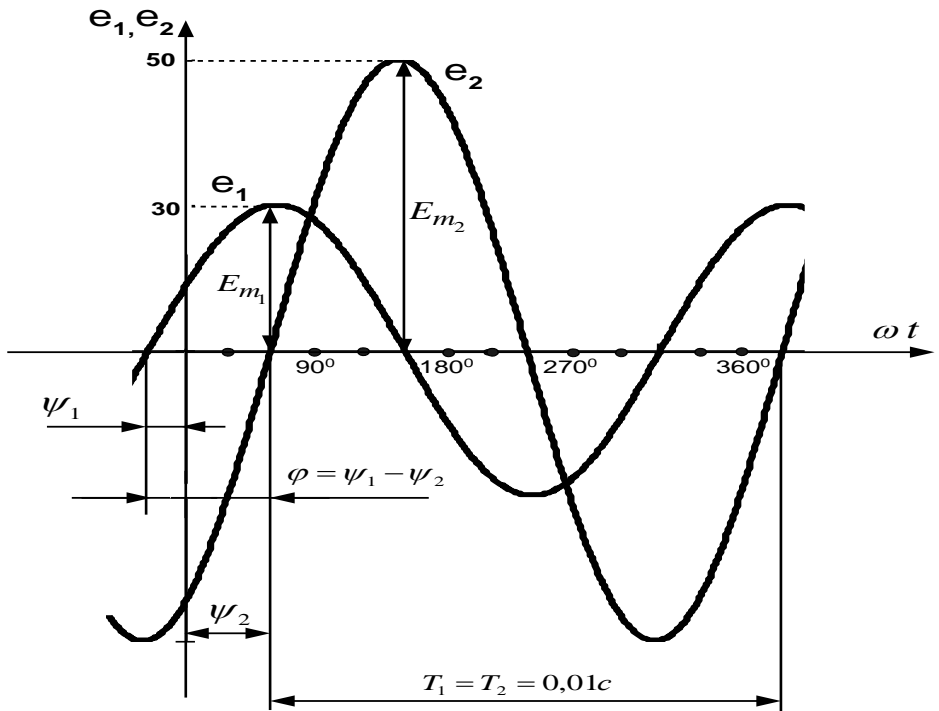


Рисунок 4.2 - Временные графики ЭДС  $e_1$  и  $e_2$  к примеру 2

$$\psi_1 = +30^\circ; \psi_2 = -60^\circ;$$

Частота двух ЭДС одинакова:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,01} = 100 \text{ Гц}.$$

Угловая частота

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 100 = 628 \text{ рад/с}.$$

Уравнения для ЭДС:

$$e_1 = E_{m1} \sin(\omega t + \psi_1) = 30 \sin(628t + 30^\circ),$$

$$e_2 = E_{m2} \sin(\omega t + \psi_2) = 50 \sin(628t - 60^\circ).$$

При этом ЭДС  $e_1$  является опережающей по отношению к  $e_2$ .

Угол сдвига фаз

$$\psi_1 - \psi_2 = 30^\circ - (-60^\circ) = 90^\circ.$$

### Пример 3

Определить сдвиг по фазе двух синусоидально изменяющихся токов:

$$i_1 = I_{m1} \sin(314t + \frac{\pi}{6}), i_2 = I_{m2} \sin(314t - \frac{\pi}{6}),$$

а также отрезок времени  $\Delta t$ , разделяющий моменты прохождения их через максимум.

### Решение

Уравнение синусоидального тока в общем виде имеет вид

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Сравнивая это уравнение с приведенными для токов  $i_1$  и  $i_2$ , можно установить:

угловая частота  $\omega$  для двух токов

$$\omega = 314(\text{рад}/\text{с});$$

начальные фазы для первого и второго тока соответственно:

$$\psi_1 = +\frac{\pi}{6} = +60^\circ; \psi_2 = -\frac{\pi}{6} = -60^\circ;$$

угол сдвига фаз

$$\psi_1 - \psi_2 = +30^\circ - (-30^\circ) = 60^\circ;$$

частота токов

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{2\pi} = 50 \text{Гц};$$

период токов

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{с}.$$

Максимумы токов отстоят на угол, равный углу сдвига фаз, который составляет шестую часть периода.

Отрезок времени

$$\Delta t = \frac{T}{6} = \frac{0,02}{6} = 0,0033с .$$

### 4.3 Задачи для самостоятельного решения

1 Частота колебаний синусоидально изменяющегося напряжения  $u = 100 \sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$  равна:  $f = 50 Гц$ . Определить

мгновенное значение  $u$  для времени  $t = \frac{1}{80} с$ .

2 Определить амплитуду синусоидально изменяющейся ЭДС  $e = E_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$ , если известно, что при  $t = 0$   $e = 100 В$ .

3 Найти период и частоту синусоидального тока  $i = 10 \sin(1570t - \frac{\pi}{4})$  и определить моменты времени начала положительной и отрицательной полуволн.

4 Амперметр электромагнитной системы, включенный в цепь синусоидального тока частотой  $f = 400 Гц$ , показывает  $10 А$ . Написать уравнение для тока, если известно, что ток изменяет свое отрицательное значение на положительное через  $0,0001 с$  после подключения цепи к источнику.

## 5 Общий подход к расчету электрических цепей синусоидального тока

Наличие синусоидального тока в проводниках всегда связано с преобразованием электрической энергии в тепловую (проводники нагреваются), а также с созданием переменных магнитных и электрических полей. Изменяющееся магнитное поле наводит в проводниках ЭДС, а изменение электрического поля сопровождается изменением зарядов на проводниках.

В электрических цепях нельзя выделить какой-либо участок, с которым не были бы связаны все эти явления. Полный учет всех этих явлений намного затруднил бы расчет электрических цепей. Для облегчения расчета реальные цепи заменяют идеализированными схемами или элементами, позволяющими учитывать только отдельные явления, в максимальной мере присущие данной схеме или элементу.

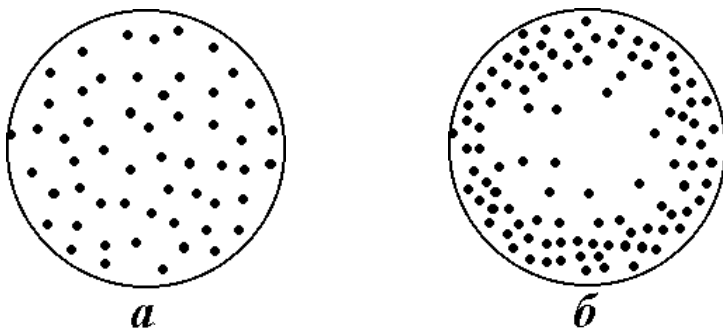
Например, в обычном реостате происходит не только выделение тепла от синусоидального тока, но и образование переменных магнитных и электрических полей, однако интенсивность двух последних процессов во много раз меньше, чем процесс преобразования электрической энергии в тепло, поэтому схема замещения реостата учитывает только активное сопротивление.

В электрических цепях синусоидального тока различают три элемента. Для характеристики процесса преобразования электрической энергии в тепловую вводят элемент, называемый *активным сопротивлением*; для характеристики переменного магнитного поля вводят *индуктивность*, а для характеристики переменного электрического поля – *емкость*.

Прежде чем рассмотреть электрические цепи с включением этих элементов, дадим характеристики каждому из указанных элементов.

## **5.1 Определение и эквивалентная схема активного сопротивления**

Под активным сопротивлением понимают сопротивление проводника переменному току, которое из-за поверхностного эффекта всегда больше омического сопротивления того же проводника постоянному току. На рисунке 5.1,а и б показано распределение линий тока по сечению проводника при постоянном и переменном токе. Каждую линию тока можно рассматривать как отдельный проводник с током. Как вокруг любого проводника с током, так и вокруг каждой линии тока замыкаются силовые линии магнитного потока, который охватывает не только свою линию, но и соседние, расположенные рядом.



***а** – при постоянном токе; **б** – при переменном токе*  
*Рисунок 5.1-Распределение линий тока по сечению проводника*

Чем больше концентрация линий тока, тем больше силовых линий магнитного потока приходится на одну линию тока, так как ее результирующий магнитный поток (обозначается буквой  $\Psi$ ) складывается из собственного магнитного потока и магнитных потоков соседних линий тока. При переменном токе магнитный поток изменяется во времени и в соответствии с законом электромагнитной индукции в проводнике наводится ЭДС, препятствующая изменению тока:

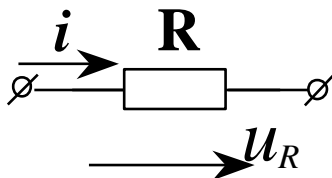
$$e = -\frac{d\Psi}{dt}.$$

Это противодействие тем значительнее, чем больше ЭДС, т.е. чем больше потокосцепление  $\Psi$ . Линии тока, расположенные в середине сечения, имеют большее значение  $\Psi$ , чем те, которые расположены на его периферии. Поэтому в центральной части сечения проводника сопротивление изменению тока больше, чем в периферийных областях. Из-за этого линии тока вытесняются из центральных областей сечения в периферийные (как показано на рис.5.1,б), что приводит к сокращению сечения, используемого током, т.е. равносильно увеличению сопротивления проводника.

В цепях постоянного тока изменение магнитного потока во времени наблюдается кратковременно только в моменты включения и отключения токов (во время переходных процессов),

в остальное время  $\frac{d\Psi}{dt} = 0, e = 0$  и линии тока по сечению распределяются равномерно (см. рис.5.1,а).

При частоте 50Гц поверхностный эффект заметен только в проводниках (шинах) достаточно большого поперечного сечения. В проводниках диаметром менее 1см увеличением сопротивления вследствие поверхностного эффекта при частоте 50Гц и ниже можно пренебречь. При более высоких частотах активное сопротивление всегда больше омического. Условное обозначение активного сопротивления приведено на рис. 5.2.



*Рисунок 5.2 – Условное обозначение активного сопротивления*

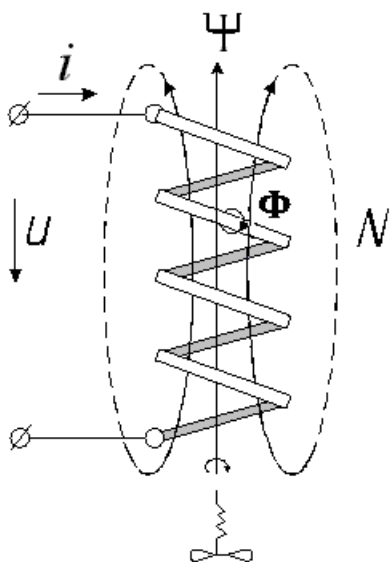
## **5.2 Определение и эквивалентная схема индуктивности**

Вокруг каждого проводника с током существует магнитное поле, одной из характеристик которого является магнитный поток  $\Phi$ .

В катушке индуктивности проводники свернуты в спирали и суммарный магнитный поток увеличивается в  $N$  раз, где  $N$  – количество витков катушки.

Суммарный магнитный поток катушки обозначают буквой  $\Psi$  и называют потокосцеплением. Если магнитный поток вызван только собственным током катушки и рядом с катушкой нет других (посторонних) магнитных полей, которые влияли бы на ее магнитное поле, такой магнитный поток называют магнитным потоком самоиндукции.





*Рисунок 5.3 - Ток  $i$ , магнитный поток  $\Phi$  и потокосцепление  $\Psi$  катушки индуктивности*

То же – в отношении потокосцепления  $\Psi$ .

В таком случае потокосцепление определяется как произведение магнитного потока  $\Phi$  одного витка на количество витков  $N$ :

$$\Psi = \Phi N .$$

Направление  $\Psi$  в катушках определяется по правилу буравчика: если рукоятку буравчика вращать по направлению тока в витках катушки, то движение лезвия укажет направление  $\Psi$ .

Если пропустить один и тот же ток по виткам нескольких катушек, которые различаются между собой по количеству витков, по соотношению площади витка и длины катушки, окажется, что в катушках

образуются потокосцепления различной величины. В катушках, которые не содержат ферромагнитных сердечников, величина потокосцепления  $\Psi$  прямо пропорциональна току  $I$  в витках. Коэффициент пропорциональности между  $\Psi$  и  $I$  обозначают буквой  $L$  и называют индуктивностью катушки:

$$\Psi = LI , \text{ откуда } L = \frac{\Psi}{I} ,$$

т.е. индуктивность  $L$  равна отношению потокосцепления катушки к току в ее витках. При пропорциональной зависимости  $\Psi$  и  $I$  индуктивность  $L$  является величиной линейной. Размерность индуктивности:

$$[L] = \frac{[\Psi]}{[I]} = \frac{Вб}{А} = \frac{В \cdot с}{А} = \frac{Ом \cdot А \cdot с}{А} = Ом \cdot с = Гн$$

Индуктивностью в  $1 Гн$  обладает катушка, которая при токе в  $1 А$  создает потокосцепление  $\Psi$ , равное  $1 Вб$ .

Индуктивность  $L$  является параметром линейных индуктивных элементов, а сам линейный индуктивный элемент – схемой замещения любой части электротехнического устройства, в которой потокосцепление пропорционально току. Условное обозначение индуктивного элемента приведено на рис. 5.4.

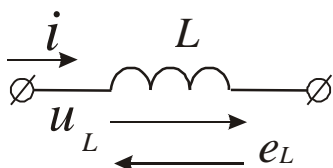


Рисунок 5.4 - Условное обозначение индуктивного элемента

При синусоидальном токе магнитный поток и потокосцепление изменяются во времени согласно закону электромагнитной индукции, при этом в витках катушки наводится ЭДС самоиндукции:

$$e_L = -\frac{d\Psi}{dt}.$$

Или, учитывая, что  $\Psi = Li$ ,

$$e_L = -L \frac{di}{dt}.$$

Направление ЭДС самоиндукции изменяется в зависимости от характера изменения тока в катушке: при увеличении тока

$\left(\frac{di}{dt} > 0\right)$  ЭДС направлена встречно току, при уменьшении

$\left(\frac{di}{dt} < 0\right)$  - согласно с ним, т.е. в любой момент времени

препятствует изменению тока. Индуктивность  $L$  выступает как инерционный элемент.

С энергетической точки зрения *идеализированный индуктивный элемент характеризуется преобразованием электрической энергии в энергию магнитного поля при*

*нарастании тока и обратным преобразованием энергии магнитного поля в электрическую при его уменьшении по модулю.* Реальная катушка обладает не только индуктивностью, но и активным сопротивлением провода, из которого выполнена обмотка, поэтому схема замещения реальной катушки состоит из двух элементов: активного сопротивления  $R$  и индуктивности  $L$  (рис.5.5).

Уравнение, составленное для этой катушки в соответствии со вторым законом Кирхгофа:

$$e = u_R + u_L \text{ или}$$

$$e = iR + L \frac{di}{dt}.$$

Умножив каждую часть уравнения на  $i dt$ , получим уравнение энергетического равновесия для катушки:

$$e i dt = i^2 R dt + L i di,$$

где  $e i dt$  - энергия, отдаваемая источником;  $i^2 R dt$  - часть этой энергии, преобразуемая активными сопротивлениями в тепло;  $L i di$  - другая часть энергии источника, которая преобразуется в магнитную энергию  $W_M$  и накапливается в катушке.

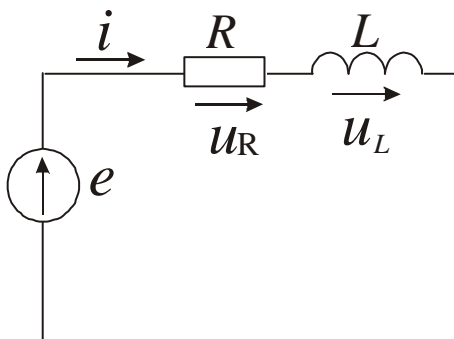


Рисунок 5.5 - Схема замещения реальной катушки

Для последней составляющей уравнения можно записать:

$$dW_M = L i di = \Psi di,$$

откуда

$$W_M = \int_0^{I_{уст}} \Psi di = \int_0^{I_{уст}} L i di = \frac{L I_{уст}^2}{2},$$

где  $I_{уст}$  - установившееся значение тока в катушке.

Величина накопленной магнитной энергии определяется соотношениями:

$$W_M = \frac{LI_{уст}^2}{2} \text{ или } W_M = \frac{\Psi I_{уст}}{2}.$$

Из этих соотношений следует: **магнитная энергия накапливается в катушке только при изменяющемся токе  $di$  и только в момент его нарастания.** При достижении установившегося значения тока процесс накопления магнитной

энергии прекращается. При уменьшении тока  $\left(\frac{di}{dt} < 0\right)$  энергия

становится отрицательной, т.е. направлена от катушки в цепь. Это значит, что накопленная магнитная энергия преобразуется в электрическую и ЭДС самоиндукции поддерживает уменьшающийся по величине ток катушки.

### 5.3 Определение и эквивалентная схема электрической емкости

Если какие-то части электротехнического устройства накапливают электрические заряды различной полярности, то между такими частями устанавливается электрическое поле. В некоторых электротехнических устройствах, например изоляторах, конденсаторах, возникают достаточно сильные электрические поля. Понятие емкости разберем на примере простейшего плоского конденсатора.

На рис.5.6 изображен такой конденсатор с двумя параллельными обкладками площадью  $S$ , которые находятся в вакууме на расстоянии  $d$  друг от друга. Если между верхней и нижней обкладками приложить напряжение  $U_c$ , то на обкладках конденсатора накопятся одинаковые по величине положительный и отрицательный заряды  $\pm q$ . Эти заряды называют свободными.

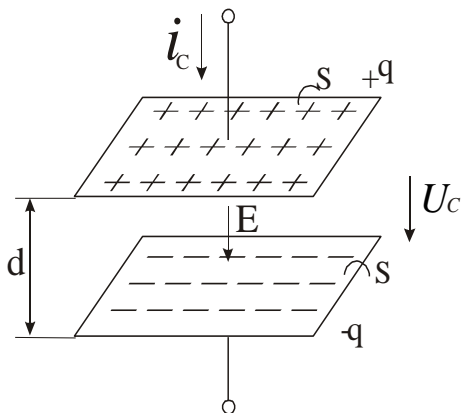


Рисунок 5.6 - Плоский заряженный конденсатор

Если принять электрическое поле между обкладками однородным, то напряженность  $E$  этого поля можно выразить отношением напряжения  $U_c$  к расстоянию  $d$  между обкладками:

$$E = \frac{U_c}{d}. \quad (5.1)$$

С другой стороны, учитывая теорему Остроградского-Гаусса, эту же напряженность можно представить как отношение

поверхностной плотности заряда  $\sigma$  на обкладках к электрической проницаемости вакуума  $\epsilon_0$  (электрической постоянной):

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

где  $\sigma = \frac{q}{S}$ , а  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ .

Учитывая соотношение для  $\sigma$ , выражение для напряженности будет иметь следующий вид:

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 S}. \quad (5.2)$$

Из выражений (5.1) и (5.2) получим напряжение  $U_c$ :

$$\frac{U_c}{d} = \frac{q}{\epsilon_0 S} \Rightarrow U_c = \frac{qd}{\epsilon_0 S}. \quad (5.3)$$

Если приложить одно и то же напряжение к обкладкам конденсаторов, отличающихся геометрическими размерами ( $d$  и

$S$ ), то и заряды, возникающие на их обкладках, будут также неодинаковы. Большое влияние на величину заряда оказывает и электрическая проницаемость среды (материала), которая находится между пластинами. Коэффициент пропорциональности между зарядом конденсатора  $q$  и напряжением на его обкладках  $U_c$  обозначают  $C$  и называют емкостью конденсатора.

$$q = CU_c \Rightarrow C = \frac{q}{U_c}. \quad (5.4)$$

Учитывая выражение (5.3), получим соотношение для емкости плоского вакуумного конденсатора:

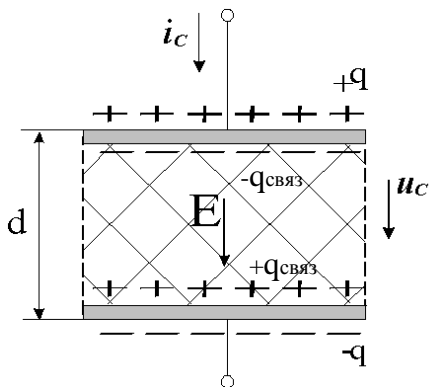
$$C = \frac{q}{qd / \varepsilon_0 S} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}. \quad (5.5)$$

Для увеличения емкости конденсатора пространство между пластинами заполняют диэлектриком (рис.5.7).

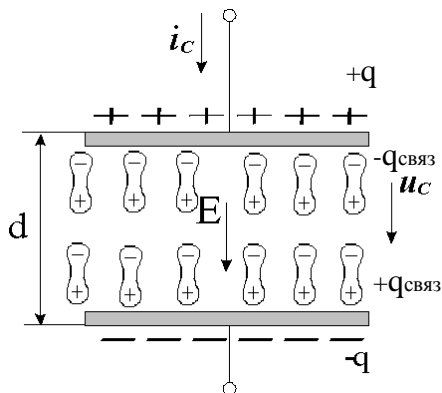
Молекулы диэлектриков, используемых в конденсаторах, представляют собой диполи – образования, в противоположных концах которых сосредоточены разноименные заряды. Под действием электрического поля  $E$  диполи приобретают направленную ориентацию, как показано на рис.5.8. При этом внутри диэлектрика положительные и отрицательные заряды диполей компенсируются, а на границах с обкладками остаются нескомпенсированные слои связанных зарядов диэлектрика:  $+q_{связ}$  и  $-q_{связ}$  (связанные, потому что они сосредоточены в диэлектрике и не могут свободно перемещаться как заряды на пластинах конденсатора).

Наличие связанных зарядов уменьшает напряженность электрического поля внутри конденсатора:

$$E = \frac{U_c}{d} = \frac{q - q_{связ}}{\varepsilon_a S}, \quad (5.6)$$



*Рисунок 5.7 - Плоский конденсатор с диэлектриком между пластинами*



*Рисунок 5.8 - Поляризация (ориентация) дипольных молекул диэлектрика в электрическом поле конденсатора*

откуда следует, что при одной и той же напряженности  $E$ , а следовательно, и напряжении  $U_c$  заряд  $q$  должен быть больше у конденсатора с диэлектриком между обкладками. А так как емкость  $C$  конденсатора определяется только величиной свободных зарядов  $q$  на пластинах, то из последнего уравнения следует, что емкость плоского конденсатора с диэлектриком между обкладками  $C_d$  выше, чем емкость такого же вакуумного конденсатора:

$$C_d = \frac{\varepsilon_a S}{d}, \quad (5.7)$$

где  $\varepsilon_a$  - абсолютная диэлектрическая проницаемость материала, заполняющего конденсатор.

В справочной литературе приводится значение относительной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_r$  для различных материалов, используемых в качестве диэлектрика.

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon_a = \varepsilon_r \varepsilon_0,$$

поэтому в выражении (5.7) вместо абсолютной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_a$  приводят произведение относительной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_r$  и постоянной  $\varepsilon_0$ :

$$C_\partial = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d}.$$

Основной единицей емкости в системе СИ является фарад,  $1\Phi = 1\text{ Кл}/\text{В} = 1\text{ А} \cdot \text{с}/\text{В}$ .

Емкость  $1\Phi$  – очень большая величина. В электротехнической практике обычно используются меньшие единицы: микрофарад ( $\text{мк}\Phi$ ),  $1\text{ мк}\Phi = 1 \cdot 10^{-6}\Phi$ ; нанофарад ( $\text{н}\Phi$ ),  $1\text{ н}\Phi = 1 \cdot 10^{-9}\Phi$ ; пикофарад ( $\text{п}\Phi$ ),  $1\text{ п}\Phi = 1 \cdot 10^{-12}\Phi$ .

Емкость  $C$  используется в качестве параметра конденсатора. На рисунке 5.9 приведена схема замещения линейного конденсатора с параметром  $C$  (у линейных конденсаторов зависимость между напряжением и зарядом на пластинах линейная, конденсаторы с нелинейной зависимостью между  $U_c$  и  $q$  в данном разделе не рассматриваются).

Такую схему замещения имеет идеальный конденсатор, для которого можно пренебречь приводящими к нагреванию потерями в диэлектрике и изоляции выводов, металле, обкладках и т.д.

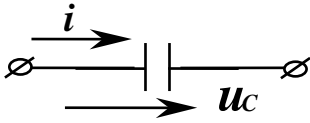
Если указанными потерями пренебречь нельзя, в схему замещения вводят активное сопротивление.

При изменении напряжения, приложенного к емкостному элементу, будет меняться и заряд на его обкладках, а значит, в цепи с емкостью появится ток. Иными словами, ток в цепи с емкостью будет существовать до тех пор, пока будет изменяться напряжение на его обкладках.

Емкостный элемент можно рассматривать и как аккумулятор электрической энергии. Рассмотрим электрическую цепь с конденсатором и активным сопротивлением (рис.5.10).



В соответствии со вторым законом Кирхгофа напишем уравнение:



$$U = u_R + u_C = iR + u_C.$$

Умножим каждую составляющую этого уравнения на множитель  $i dt$ :

$$U i dt = i^2 R dt + i u_C dt,$$

где составляющая  $U i dt$  означает энергию, которая поступает в цепь от источника;

$i^2 R dt$  - часть этой энергии, преобразуемая в тепло активным сопротивлением  $R$ ;

Рисунок 5.9 - Схема замещения линейного идеального конденсатора

$i u_C dt$  - другая часть энергии источника, которая накапливается в электрическом поле конденсатора.

$$dW_{\text{э}} = i u_C dt; W_{\text{э}} = \int_0^t i u_C dt,$$

так как

$$i = \frac{dq}{dt}, \text{ а } q = C u_C,$$

$$W_{\text{э}} = \int_0^{q_{\text{уст}}} i u_C dq = \int_0^{u_{\text{уст}}} C u_C du_C = \frac{C U^2}{2}.$$

Накопленная в конденсаторе электрическая энергия

$$W_{\text{э}} = \frac{C U^2}{2},$$

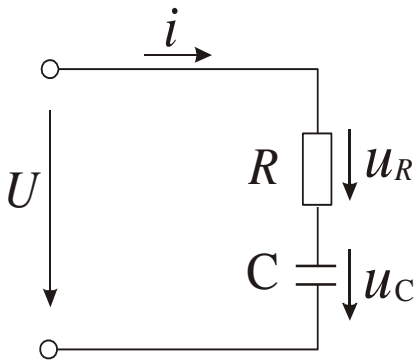


Рисунок 5.10 -  
Электрическая цепь с  
активным  
сопротивлением и  
конденсатором

где  $U_{C_{уст}}$  - установившееся значение напряжения на обкладках конденсатора.

Из приведенных соотношений видно, что изменение энергии конденсатора происходит только при изменении напряжения  $u_C$  на его обкладках, причем при увеличении напряжения

( $\frac{dU_c}{dt} > 0$ ) конденсатор заряжается, при уменьшении ( $\frac{dU_c}{dt} < 0$ ) - разряжается, возвращает энергию в цепь (источнику).

## 6 Активное сопротивление, индуктивность и емкость в цепи с синусоидальным напряжением

Рассмотрим поочередное включение в цепь с синусоидальным напряжением трех указанных элементов:  $R$ ,  $L$ ,  $C$ . Во всех трех случаях будем задаваться одним и тем же током и анализировать полученные напряжения на элементах.

### 6.1 Цепь синусоидального тока с активным сопротивлением (рис.6.1)

Пусть начальная фаза тока в цепи равна нулю, тогда выражение для мгновенного значения тока-

$$i = I_m \sin \omega t . \quad (6.1)$$

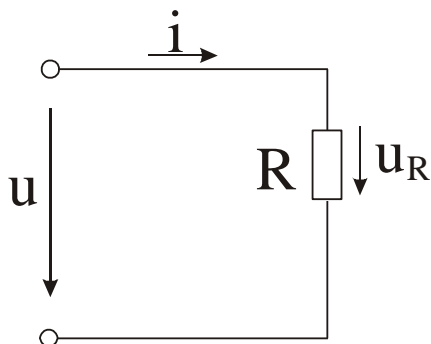


Рисунок 6.1 - Цепь синусоидального тока с активным сопротивлением

Напряжение на активном сопротивлении определяется как произведение мгновенного тока на сопротивление  $R$  :

$$u_R = iR = I_m R \sin \omega t .$$

Произведение  $I_m R$  является амплитудным значением напряжения:

$$U_{mR} = I_m R . \quad (6.2)$$

С учетом последнего окончательное выражение для напряжения-

$$u_R = U_{mR} \sin \omega t . \quad (6.3)$$

Из выражения (6.3) следует, что начальная фаза напряжения, так же как и у тока, равна нулю, значит синусоиды тока и напряжения на активном сопротивлении совпадают по фазе. Графики тока и напряжения изображены на рис.6.2.

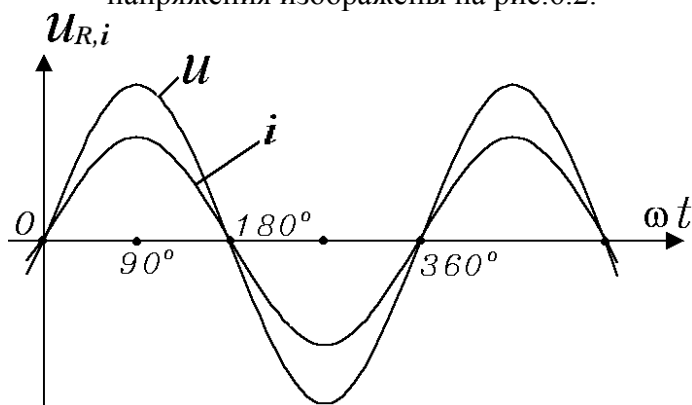


Рисунок 6.2 - Графики тока и напряжения в цепи с активным сопротивлением

Каждую синусоидальную функцию можно представить вектором на обычной или комплексной плоскости. Векторы тока и

напряжения будем изображать на комплексной плоскости, так как она содержит большую информацию о синусоидальных функциях – указывает их начальные фазы. Так как все расчеты электрических цепей выполняются в действующих значениях тока и напряжения, на векторных диаграммах будем изображать векторы действующих (а не амплитудных) значений этих величин. От векторов амплитудных значений они отличаются только тем, что их длина меньше в  $\sqrt{2}$  раз.

Так как ток имеет начальную фазу, равную нулю, располагаем вектор тока по оси положительных действительных чисел (+1). Вектор напряжения, имеющий то же значение начальной фазы, совпадает с вектором тока по направлению.

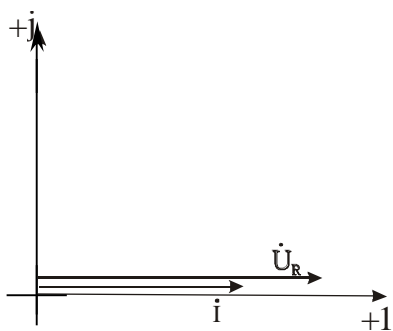


Рисунок 6.3 - Векторная диаграмма тока и напряжения на активном сопротивлении

Из этого раздела важно усвоить то, что **синусоиды напряжения и тока на активном сопротивлении совпадают по фазе, а векторы этих величин совпадают по направлению**(рис. 6.3).

Вернемся к выражению (6.2). Выделим из него амплитуду тока:

$$I_m = \frac{U_{mR}}{R}.$$

Разделив обе части равенства на  $\sqrt{2}$ , получим выражение закона Ома для действующих значений тока и напряжения:

$$I = \frac{U_R}{R}.$$

### Мощность в цепи с активным сопротивлением

Мгновенная мощность определяется как произведение мгновенного тока и мгновенного напряжения:

$$p_R = i u_R.$$

Подставим значения  $i$  и  $u_R$  из выражений (6.1) и (6.3):

$$p_R = I_m \sin \omega t U_{mR} \sin \omega t = I_m U_{mR} \sin^2 \omega t.$$

Из тригонометрии  $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$ .

Амплитудное значение тока и напряжения представим как произведение действующих значений на  $\sqrt{2}$ :

$$p_R = I\sqrt{2}U_R\sqrt{2}\frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t) = IU_R - IU_R \cos 2\omega t,$$

$$p_R = IU_R - IU_R \cos 2\omega t. \quad (6.4)$$

Построим график мощности в одних координатах с током и напряжением. Для этого будем задаваться следующими значениями  $\omega t$ :  $\omega t = 0$ ;  $\omega t = T/8$ ;  $\omega t = T/4$ ;  $\omega t = T/2$  и т.д., подставляя эти значения в выражение (6.4) и определять  $p_R$ .

Например:

$$\omega t = 0; \quad \cos 2\omega t = 1; \quad p_R = U_R I - U_R I = 0;$$

$$\omega t = T/8; \quad \cos 2\omega t = 0; \quad p_R = U_R I;$$

$$\omega t = T/4; \quad \cos 2\omega t = -1; \quad p_R = U_R I - (-U_R I) = 2U_R I.$$

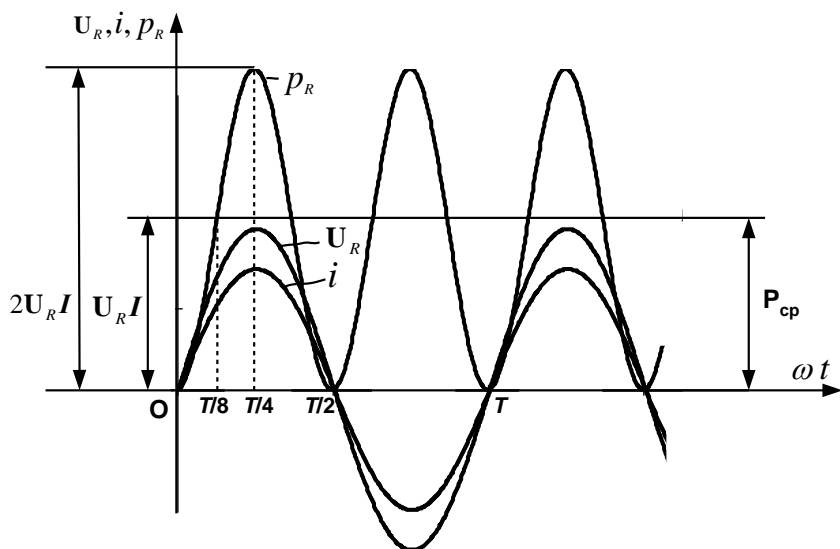
Продолжая построение, получим график мощности в цепи с активным сопротивлением (рис.6.4).

Анализируя график мощности, можно сделать следующие выводы:

- мощность  $p_R$  изменяется с удвоенной частотой по отношению к току и напряжению, что обусловлено выражением (6.4);
- в цепи с идеальным активным элементом мгновенная мощность в любой момент времени положительна, независимо от направления тока, это означает, что в любой момент времени энергия направлена от источника к приемнику, в такой цепи имеет место

необратимый процесс преобразования электрической энергии в другие виды энергии.

Мы рассмотрели только один пример преобразования электрической энергии в тепловую на активном сопротивлении. Но активной мощностью характеризуются и процессы преобразования электрической энергии в другие виды: в электрических двигателях – в механическую, в приборах освещения – в световую и тепловую, в технологических процессах гальваники (нанесение различного рода покрытий) – в химическую и т.д. Поэтому в общем случае мгновенную активную мощность обозначают  $P_a$ . В нашем случае  $P_a = P_R$ .



*Рисунок 6.4 - График мгновенной мощности в цепи с активным сопротивлением*

В расчетах используют среднее значение мощности за период:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_R dt = \frac{1}{T} \int_0^T (U_R I - U_R I \cos 2\omega t) dt = IU_R = I^2 R = \frac{U_R^2}{R}.$$

Активная мощность характеризует среднюю скорость преобразования электрической энергии в тепловую.

## 6.2 Цепь синусоидального тока с индуктивностью, мощность в цепи с индуктивностью

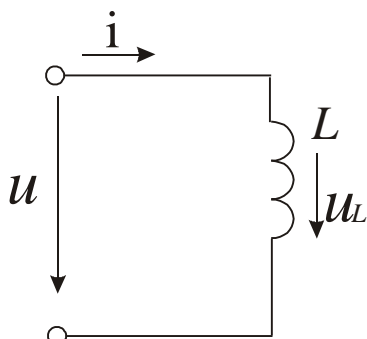


Рисунок 6.5 – Цепь синусоидального тока с индуктивностью

Пусть ток имеет то же выражение, что и в цепи с активным сопротивлением (6.1):

$$i = I_m \sin \omega t.$$

Напряжение на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d[I_m \sin \omega t]}{dt} = \omega L I_m \cos \omega t.$$

Учитывая, что  $\cos \omega t = \sin(\omega t + 90^\circ)$ , выражение для  $u_L$  -

$$u_L = \omega L I_m \sin(\omega t + 90^\circ).$$

Амплитудное значение напряжения

$$U_{mL} = \omega L I_m. \quad (6.5)$$

Окончательное выражение для напряжения  $u_L$  -

$$u_L = U_{mL} \sin(\omega t + 90^\circ). \quad (6.6)$$

Сравнивая выражения (6.1) и (6.6), видим, что синусоида напряжения на индуктивности опережает синусоиду тока на  $90^\circ$  (рис. 6.5).

Графики тока и напряжения изображены на рисунке 6.6.

Векторная диаграмма тока и напряжения на индуктивности представлена на рис.6.7. Как и синусоида напряжения, вектор  $\dot{U}_L$  опережает вектор тока на  $90^\circ$ .

Угол сдвига фаз между напряжением и током указывается стрелкой, направленной всегда от вектора тока к вектору напряжения, и определяется как разность между начальной фазой напряжения и начальной фазой тока:

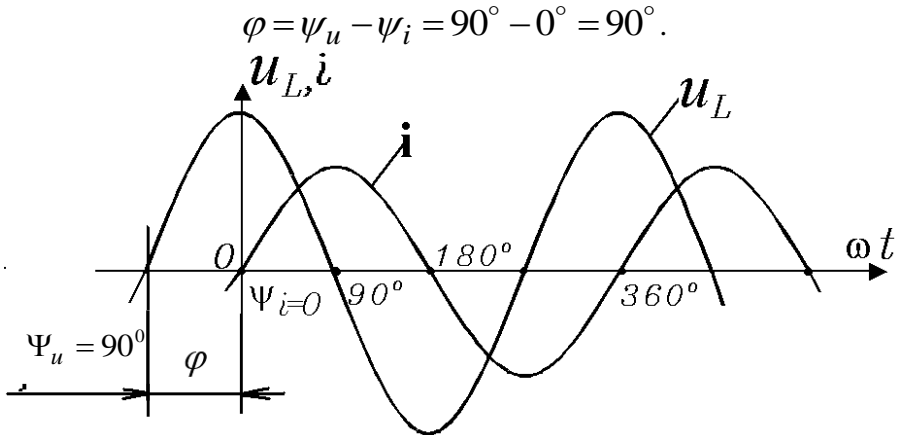


Рисунок 6.6 - Графики тока и напряжения в цепи с идеальной индуктивностью

Если на векторной диаграмме вектор напряжения опережает вектор тока, угол сдвига фаз между ними считается условно положительным.

Вернемся к выражению (6.5), и выделим из него амплитуду тока:

$$I_m = \frac{U_{mL}}{\omega L}.$$

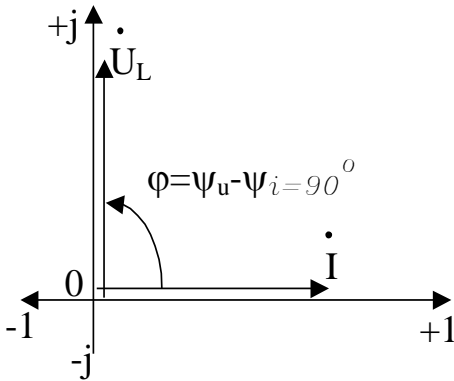
Разделим обе части равенства на  $\sqrt{2}$ :

$$I = \frac{U_L}{\omega L}. \quad (6.7)$$



Выражение  $\omega L = 2\pi fL$  обозначают  $X_L$  и называют индуктивным, реактивным сопротивлением, а равенство (6.7) – законом Ома для действующих значений тока и напряжения.

Индуктивное сопротивление зависит от индуктивности  $L$  и частоты питающего напряжения. Зависимость от частоты прямо пропорциональная: с увеличением  $f$  растет и индуктивное сопротивление. В цепи постоянного тока, где  $f = 0$ , индуктивное сопротивление также равно нулю.



Смысл индуктивного сопротивления заключается в том, что *в любой момент времени ЭДС самоиндукции препятствует изменению тока в ветви с индуктивностью: при нарастании тока – направлена встречно ему, при уменьшении – согласно.*

*Рисунок 6.7 – Векторная диаграмма тока и напряжения на индуктивности*

### **Мощность в цепи с индуктивностью**

Мгновенная мощность

$$p_L = \mathbf{U} \dot{\mathbf{i}} = U_{mL} \sin(\omega t + 90^\circ) I_m \sin \omega t = U_{mL} \cos \omega t I_m \sin \omega t .$$

Из тригонометрии  $\cos \omega t \sin \omega t = \frac{1}{2} \sin 2\omega t .$

$$p_L = U_L \sqrt{2} I \sqrt{2} \frac{1}{2} \sin 2\omega t = U_L I \sin 2\omega t ,$$

$$p_L = U_L I \sin 2\omega t \quad (6.8)$$

Построим график мгновенной мощности в одних координатах с током и напряжением, задаваясь значением  $\omega t$ :  $\omega t = 0$ ;  $\omega t = T/8$ ;  $\omega t = T/4$ ;  $\omega t = T/2$  и т.д.

$$\omega t = 0; \quad \sin 2\omega t = 0; \quad p_L = 0;$$

$$\omega t = T/8; \quad \sin 2\omega t = \sin 2T/8 = 1; \quad p_L = U_L I;$$

$$\omega t = T/4; \quad \sin 2\omega t = \sin 2T/8; \quad p_L = 0.$$

Продолжая построение аналогичным образом, получим график мощности на индуктивности (рис.6.8).

Выводы:

— Мгновенная мощность  $p_L$  изменяется по синусоидальному закону с удвоенной частотой по отношению к току и напряжению, что соответствует выражению (6.8).

— Мгновенная мощность положительна при нарастании по абсолютному значению тока на индуктивности (независимо от его направления); в это время направление энергии – от источника к приемнику, идет процесс накопления магнитной энергии в магнитном поле индуктивного элемента. В течение следующей четверти периода тока мгновенная мощность  $p_L$  отрицательна, в это время индуктивный элемент не получает энергию от источника, наоборот, накопленная магнитная энергия через ЭДС самоиндукции преобразуется в электрическую и возвращается к источнику.

Среднее значение мощности  $p_L$  за период равно нулю:

$$P_L = \frac{1}{T} \int_0^T p_L dt = 0.$$

В отличие от активного сопротивления энергетический режим индуктивного элемента принято определять не активной, а

реактивной мощностью, равной максимальной мгновенной мощности:

$$Q_L = U_L I = I^2 X_L = \frac{U_L^2}{X_L}. \quad (6.9)$$

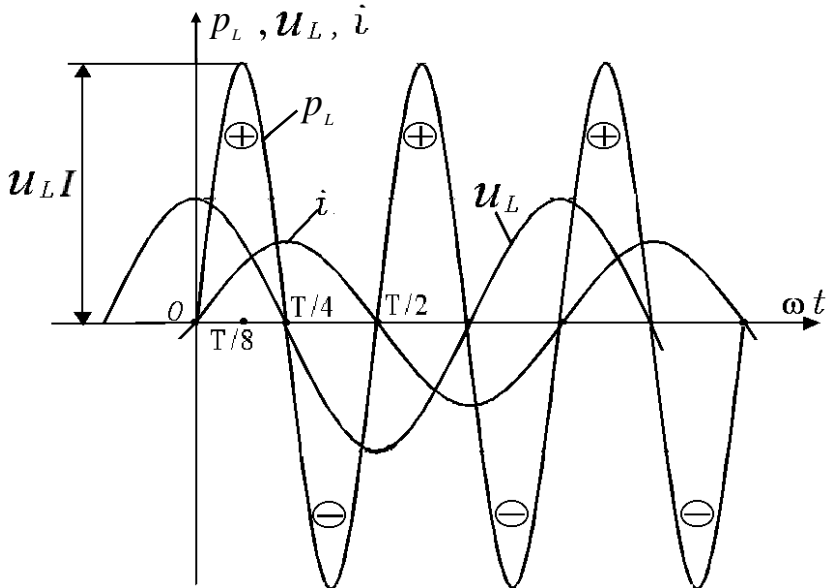


Рисунок 6.8 – Мгновенная мощность в цепи с индуктивностью

### 6.3 Цепь синусоидального тока с емкостью, мощность в цепи с емкостью

Как и в двух предыдущих случаях, воспользуемся током в соответствии с выражением (6.1):

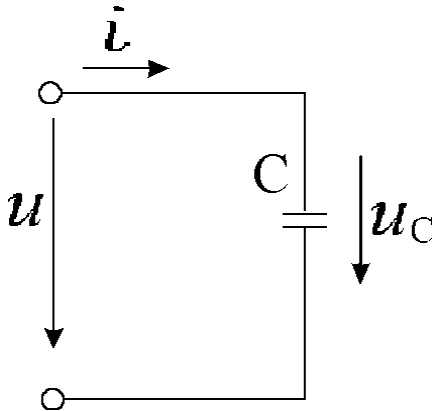
$$\dot{i} = I_m \sin \omega t.$$

Напряжение на емкости

$$u_c = \frac{1}{C} \int_0^T i dt = \frac{1}{C} \int_0^T [I_m \sin \omega t] dt = -\frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t.$$

Учитывая, что  $-\cos \omega t = \sin(\omega t - 90^\circ)$ , выражение для  $u_c$  -

$$u_c = \frac{1}{\omega C} I_m \sin(\omega t - 90^\circ).$$



Амплитудное значение напряжения

$$U_{m_c} = \frac{1}{\omega C} I_m. \quad (6.10)$$

Окончательное выражение для  $u_c$  -

$$u_c = U_{m_c} \sin(\omega t - 90^\circ). \quad (6.11)$$

Сравнивая (6.1) с (6.11), можно увидеть, что **синусоида напряжения на емкости отстаёт от синусоиды тока на  $90^\circ$** . Графики тока и напряжения показаны на рис.6.10.

Рисунок 6.9 – Цепь синусоидального тока с емкостью

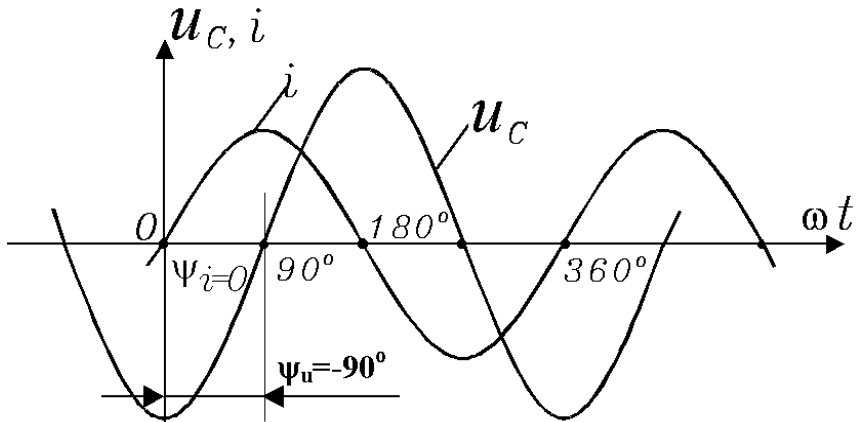
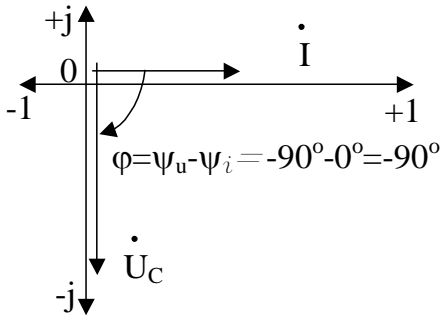


Рисунок 6.10 – Графики тока и напряжения в цепи с емкостью

Векторная диаграмма тока и напряжения на емкости представлена на рисунке 6.11. Вектор  $U_c$  отстает от вектора тока на  $90^\circ$ . Угол сдвига фаз

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = -90^\circ - 0^\circ = -90^\circ.$$



В случае опережения вектором тока вектора напряжения угол сдвига фаз считается условно отрицательным.

Рассмотрим равенство (6.10) и выразим из него амплитуду тока:

$$I_m = \frac{U_c}{1/\omega C}.$$

Рисунок 6.11 - Векторная диаграмма тока и напряжения на емкости

Разделим обе части равенства на  $\sqrt{2}$  :

$$I = \frac{U_c}{1/\omega C}. \quad (6.12)$$

Выражение  $\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$  обозначают  $X_c$  и называют

емкостным реактивным сопротивлением, а равенство (6.12) – законом Ома для действующих значений тока и напряжения. Емкостное сопротивление зависит от величины емкости  $C$  и частоты  $f$  питающего напряжения, причем зависимость обратная: при увеличении частоты  $f$  питающего напряжения емкостное сопротивление уменьшается. В цепи постоянного тока, где  $f = 0$ , сопротивление заряженного конденсатора имеет бесконечно

большое значение. *Смысл емкостного сопротивления в том, что по мере заряда конденсатора накопленные заряды на его обкладках препятствуют размещению очередных, одноименных, поступающих от источника. Сопротивление незаряженного конденсатора равно нулю.*

### **Мощность в цепи с емкостью**

Мгновенная мощность (рис. 6.12)

$$p_C = U_C \dot{i} = U_{mc} \sin(\omega t - 90^\circ) I_m \sin \omega t = -U_{mc} \cos \omega t I_m \sin \omega t .$$

Как в предыдущем случае, сделаем замену:

$$\cos \omega t \sin \omega t = \frac{1}{2} \sin 2\omega t ;$$

$$p_C = -U_C \sqrt{2} I \sqrt{2} \frac{1}{2} \sin 2\omega t = -U_C I \sin 2\omega t ;$$

$$p_C = -U_C I \sin 2\omega t . \quad (6.13)$$

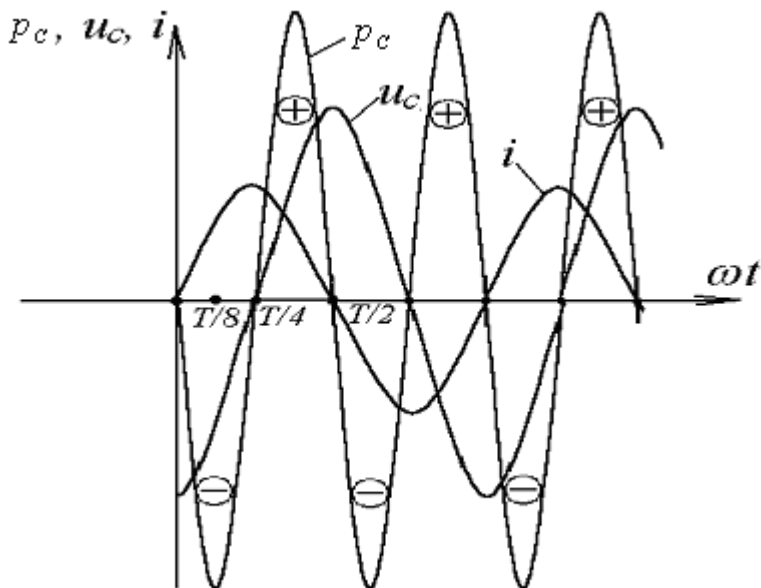


Рисунок 6.12 – График мгновенной мощности в цепи с емкостью

Полученное выражение для мгновенной мощности аналогично выражению мощности другого реактивного элемента – индуктивности. Отличие только в том, что выражение для  $p_c$  имеет знак минус. Построим график мгновенной мощности  $p_c$  в одних координатах с напряжением и током, задаваясь последовательно теми же значениями  $\omega t$ , что и при построении  $p_L$ .

Выводы из графика мгновенной мощности  $p_c$ :

- Частота изменения мгновенной мощности также удвоена по отношению к частоте тока и напряжения, что соответствует выражению (6.13);
- Мгновенная мощность положительна при нарастании по абсолютному значению напряжения на обкладках конденсатора (независимо от направления напряжения). В это время поток энергии – от источника к приемнику, идет заряд конденсатора – накопление энергии в электрическом поле конденсатора.

В течение следующей четверти периода (напряжение на обкладках уменьшается) емкостный элемент не получает энергию от источника, накопленная электрическая энергия возвращается источнику, конденсатор разряжается. Среднее значение мощности за период также равно нулю:

$$P_C = \frac{1}{T} \int_0^T p_c dt = 0.$$

Энергетический режим определяется реактивной мощностью, равной максимальной мгновенной, это значение и используют в расчетах.

$$Q_C = U_C I = I^2 X_C = \frac{U_C^2}{X_C}.$$

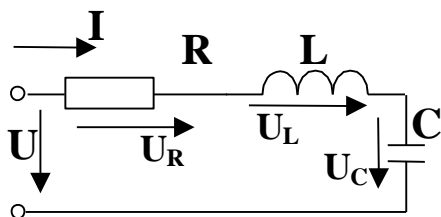
Из графиков мгновенных мощностей  $p_L$  и  $p_c$  (см. соответственно рис.6.8. и 6.12.) можно заметить, что при одном и том же токе на элементах синусоиды мощностей на индуктивном и

емкостным элементам находятся в противофазе, т.е. имеют разные знаки. Поэтому при наличии в одной цепи индуктивного и емкостного элементов результирующее значение реактивной мощности определяют как разность  $Q_L$  и  $Q_C$ , причем мощность  $Q_L$  принимается положительной,  $Q_C$  - отрицательной:

$$Q_{\Sigma} = Q_L - Q_C.$$

## 7 Расчет цепей синусоидального тока с последовательным соединением R, L, C-элементов, мощность в цепях синусоидального тока

На рис.7.1 представлена схема электрической цепи, в которой последовательно включены три элемента: активное сопротивление, индуктивность и емкость.



*Рисунок 7.1 – Цепь с последовательным включением активного сопротивления, индуктивности и емкости*

Для этой цепи уравнение, составленное по второму закону Кирхгофа для мгновенных значений:

$$u = u_R + u_L + u_C,$$

или

$$u = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt.$$

Режимы работы электрических цепей синусоидального тока с индуктивными и

емкостными элементами описываются дифференциальными уравнениями.

И расчет мгновенных значений токов и напряжений требует решения системы дифференциальных уравнений, что представляет собой довольно сложный путь. В практике этот метод используется редко в основном, для случаев расчета переходных процессов. Для расчетов установившихся режимов работы электрических цепей с одним источником используются более простые методы: метод



векторного анализа (метод векторных диаграмм) и символический метод. Рассмотрим первый из них-метод векторного анализа. Для вывода используемых в расчетах соотношений составим уравнение для напряжений электрической цепи в векторной форме в соответствии со вторым законом Кирхгофа:

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C. \quad (7.1)$$

В соответствии с этим уравнением построим векторную диаграмму. **Векторной диаграммой** называют изображение на обычной или комплексной плоскости векторов всех действующих в цепи напряжений, токов и ЭДС с обязательным отображением законов Кирхгофа.

Начинают построение диаграммы с вектора той величины, которая является общей для всех элементов. Для последовательной цепи – это вектор тока. Пусть начальная фаза тока равна нулю, тогда этот вектор необходимо отложить по направлению положительной вещественной оси «+1».

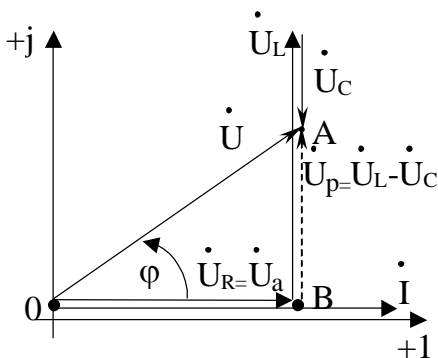


Рисунок 7.2 – Векторная диаграмма тока и напряжений для цепи с последовательным соединением RLC

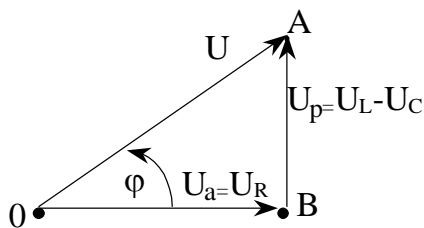


Рисунок 7.3 – Треугольник напряжений для цепи, приведенной на рис.7.1

Вектор напряжения на активном сопротивлении ( $U_a = U_R$ ) совпадает по фазе с вектором тока, на индуктивности ( $U_L$ ) опережает на  $90^\circ$ , а на емкостном ( $U_C$ ) отстает от вектора тока на такой же угол. Условимся, что в нашем случае  $X_L > X_C$ , при одном и том же токе в последовательной цепи и напряжения на этих элементах будут находиться в таком же соотношении:  $U_L > U_C$ . Треугольник АОВ называется треугольником напряжений. Стороны этого треугольника (рис.7.2 и 7.3) в масштабе напряжений представляют следующие величины:

сторона ОА – полное напряжение, приложенное к цепи  $U$ ;

сторона ОВ – активная составляющая полного напряжения

$$U_a = U_R;$$

сторона АВ – реактивная составляющая полного напряжения

$$U_p = U_L - U_C.$$

Из треугольника напряжений полное напряжение цепи определится:

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}. \quad (7.2)$$

Представим напряжения в уравнении (7.1) как произведение тока на соответствующее сопротивление:

$$U_a = U_R = IR; \quad U_L = I X_L; \quad U_C = I X_C.$$

С учетом этих обозначений уравнение (7.2) примет вид

$$U = \sqrt{I^2 R^2 + I^2 (X_L - X_C)^2} = I \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

Ток из последнего равенства

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}. \quad (7.3)$$

Выражение в знаменателе обозначают  $Z$  и называют полным сопротивлением цепи:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \quad (7.4)$$

В цепи с последовательным соединением элементов полное сопротивление определяется геометрической суммой активных и реактивных сопротивлений. Если в цепь включены по несколько активных, индуктивных и емкостных сопротивлений, в формулу (7.4) подставляют их суммы:

$$Z = \sqrt{\sum R^2 + (\sum X_L - \sum X_C)^2}.$$

Равенство (7.3) с учетом обозначения полного сопротивления называют законом Ома для действующих значений тока и напряжения:

$$I = \frac{U}{Z}.$$

Дополнительные соотношения из треугольника напряжений, используемые в расчетах:

— для определения активной и реактивной составляющих полного напряжения-

$$U_a = U \cos \varphi; U_p = U \sin \varphi,$$

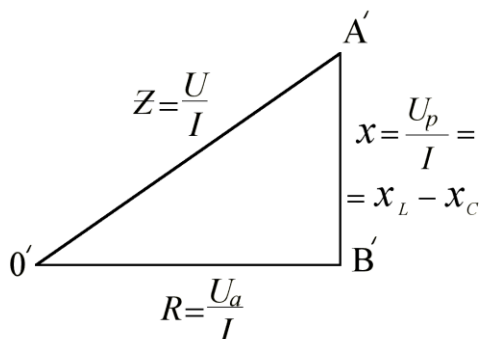
где  $\varphi$  - угол сдвига фаз между током и полным напряжением цепи;

— для определения угла сдвига фаз при известных активной и реактивной составляющих-

$$\cos \varphi = \frac{U_a}{U}; \sin \varphi = \frac{U_p}{U}; \operatorname{tg} \varphi = \frac{U_p}{U_a}.$$

## *Треугольник сопротивлений*

Если разделить каждую сторону векторного треугольника напряжений ОАВ (см. рис.7.2) на вектор тока, получится треугольник сопротивлений (рис.7.4).



*Рисунок 7.4 – Треугольник сопротивлений, полученный из треугольника напряжений (см. рис.7.2)*

В масштабе сопротивлений гипотенуза треугольника  $O'A'$  представляет полное сопротивление цепи  $Z = \frac{U}{I}$ ; катет  $O'B'$  – активное сопротивление  $R = \frac{U_a}{I}$ ; катет  $A'B'$  – реактивное сопротивление  $X = \frac{U_p}{I}$ .

Основные соотношения из треугольника сопротивлений, используемые в расчетах:

$$R = Z \cos \varphi; \quad X = Z \sin \varphi; \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \text{где } X = X_L - X_C;$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}; \quad \sin \varphi = \frac{X}{Z}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}.$$

### *Мощность в цепи с последовательным сопротивлением $R, L, C$ – элементов*

Мгновенную полную мощность  $P$  рассмотрим на примере цепи (см. рис.7.1), в которой нагрузка имеет активно-индуктивный характер.

Пусть выражение для тока имеет следующий вид:

$$\dot{i} = I_m \sin \omega t.$$